Problema especial 1 Variable compleja II 2018–2019

Instrucciones: El problema es voluntario y parte de la prueba de la identidad de Ramanujan descrita en la web del curso. Se puede realizar individualmente o en grupo pero en cualquier caso las redacciones deben ser personales y distintas. **Solo se pueden dar por supuesto resultados vistos en esta asignatura y en asignaturas previas del grado**. Una solución correcta completa de este problema especial añade 0.4 a la calificación. Una solución especialmente original se podrá premiar con una puntuación mayor.

Plazo y modo de entrega: Hasta el 20 de febrero (incluido), preferentemente en papel. Si, por el contrario, se usa el correo electrónico, enviaré confirmación.

---

1) El objetivo de este problema es probar la identidad

$$\Big(\int_0^\infty x^{-1/4}e^{-x}\,dx\Big)^4=\frac{\pi^3}{8}\Big(\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}\Big)^{-2},$$

lo cual da una expresión alternativa del miembro constante de la identidad de Ramanujan que nos será útil más adelante.

La prueba que se me ha ocurrido es muy indirecta y pasa por la siguiente indicación. Se premiará que alguien encuentre una prueba más sencilla o elegante que no las siga.

Indicación. Escribe

$$\Big(\int_0^\infty x^{-1/4}e^{-x}\,dx\Big)^2\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}=\int_0^1\int_0^\infty\int_0^\infty (xy)^{-1/4}e^{-x-y}(1-z^4)^{-1/2}\,dxdydz$$

y en esta integral triple haz un cambio de variable $(x,y,z)\mapsto(a,b,c)$

$$x=a,\qquad y=ac^4+b^2,\qquad z=\big(a^{-1}b^2c^{-4}+1\big)^{-1/4}.$$

Es importante que indiques y justifiques en qué rangos se mueven a, b y c. Si lo has hecho bien, habrá una simplificación masiva y la integral triple se reducirá a una integral trivial en a y a otra que es bien conocida en b. De esta forma se llegará a una integral de una variable que se puede calcular por residuos.