Hoja 8

Curvas. Integrales de línea. Fórmula de Green

1.- Hallar el vector tangente (normalizado) a la trayectoria $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ en el punto $(1, -1)$. Escribir la ecuación de la recta tangente correspondiente. ¿Existe la recta tangente en el punto $(0, 0)$?

2.- Para las siguientes trayectorias, hallar la velocidad, la rapidez (es decir, la longitud del vector velocidad), la aceleración y la ecuación de la recta tangente en el punto correspondiente al valor de t dado:

(a) $\gamma(t) = \big(e^{-t} \operatorname{sen} t, e^{-t} \cos t\big), \quad t = 2\pi.$ $\qquad$ (b) $\sigma(t) = \big(e^{-2t} \operatorname{sen}(2t), e^{-2t} \cos(2t), e^{-2t}\big), \quad t = \dfrac{\pi}{2}.$

3.- Hallar la longitud de la curva en el intervalo indicado:

(a) $\sigma(s) = (s, 4s, s^2)$, $0 \le s \le 4$.

(b) $\sigma(u) = \big(e^{-u} \cos u, e^{-u} \operatorname{sen} u\big)$, $0 \le u < +\infty$.

4.- Dibujar el arco de cicloide descrito por $x = R(t - \operatorname{sen} t)$, $y = R(1 - \cos t)$, con $0 \le t \le 2\pi$ y hallar su longitud.

5.- Hallar la longitud del arco de hipocicloide descrito por $x(t) = \cos^3 t$, $y(t) = \operatorname{sen}^3 t$, $0 \le t \le \pi/2$.

6.- Calcular la longitud de la curva:

$$\sigma(t) = \begin{cases} \big(\cos t, \operatorname{sen} t, 3t\big) & \text{si} \quad 0 \le t \le \pi, \\ \big(-1, -t + \pi, 3t\big) & \text{si} \quad \pi \le t \le 2\pi. \end{cases}$$

7.- Dada la curva γ mediante las ecuaciones paramétricas $x = t \cos t$, $y = t \operatorname{sen} t$, $z = t$, $0 \le t \le 2\pi$, calcúlese la integral $\displaystyle\int_\gamma z\, ds$;

8.- Dibujar la curva descrita por la trayectoria σ dada por $\sigma(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, t)$, $0 \le t \le \pi$, y hallar la integral $\displaystyle\int_\sigma f\, ds$, donde $f(x, y, z) = x + y + z$.

9.- Hallar la integral $\displaystyle\int_\Gamma F(x, y) \cdot ds$ del campo vectorial F a lo largo de la curva orientada Γ que se indica. Dibujar en cada caso el camino de integración.

(a) $F(x, y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$, a lo largo de la curva $y = 1 - |1 - x|$ desde $(0, 0)$ hasta $(2, 0)$.

(b) $F(x, y) = (x + y, x - y)$, siendo Γ la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ recorrida en sentido antihorario.

10.- Para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sea $F(x, y)$ el vector unitario que apunta desde (x, y) hacia el origen de coordenadas. Calcular el trabajo que realiza el campo F para desplazar una partícula desde la posición $(2a, 0)$ hasta $(0, 0)$ a lo largo de la semicircunferencia superior de $(x - a)^2 + y^2 = a^2$.

11.- Calcular la integral $\displaystyle\int_\Gamma y\, dx + x^2\, dy$, cuando Γ es la curva :

(a) $\quad x^2 + y^2 = a\, x$ $\qquad\qquad$ (b) $\quad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

recorrida en el sentido antihorario.

12.- Hallar el trabajo que realiza el campo $F(x, y) = (y^2 + x^3, x^4)$ al recorrer el contorno del cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ en sentido antihorario.

13.- Dados los puntos $A = (2, 0)$, $B = (1, -1)$, $C = (0, -1)$ y $D = (0, 0)$ en $\mathbb{R}^2$, sea Γ el camino formado por el arco AB de la circunferencia de centro $(1, 0)$ y radio 1, y los segmentos de recta BC, CD, y DA.

Calcular el valor de la integral $\displaystyle\int_\Gamma (x^4 - x^3 e^x - y)\, dx + (x - y \arctan y)\, dy$, con Γ orientada en sentido horario.

14.- Para cada uno de los siguientes campos vectoriales $F(x, y)$ definidos en $\mathbb{R}^2$, determinar si son gradientes de algún potencial $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. En caso afirmativo, calcular el potencial f.

(a) $F(x, y) = (3\, x^2 y, x^3)$

(b) $F(x, y) = (\operatorname{sen} y - y \operatorname{sen} x + x, \cos x + x \cos y + y)$

(c) $F(x, y) = (2\, x\, e^y + y, x^2\, e^y + x - 2\, y)$

(d) $F(x, y) = (\operatorname{sen}(x\, y) + x\, y \cos(x\, y), x^2 \cos(x\, y))$.

15.- Evaluar $\displaystyle\int_\Gamma (2\, x^3 - y^3)\, dx + (x^3 + y^3)\, dy$, donde Γ es el círculo unidad orientado en el sentido antihorario.

16.- Verificar el teorema de Green para el campo (P, Q) con $P(x, y) = 2\, x^3 - y^3$ y $Q(x, y) = x^3 + y^3$ y la región anular (corona) $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\, a^2$.

17.- Sea A el área del recinto acotado por una curva γ de clase C^1, simple y cerrada en el plano y orientada en sentido antihorario. Calcular la integral de línea $\displaystyle\int_\gamma x\, dy - 4y\, dx$ en función de A.