

Integrales dobles y triples. Teorema de Fubini

1.- Sea f la función definida para $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ mediante

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{si } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(a) Demostrar que f no es integrable en el rectángulo $R = [0, 1] \times [0, 1]$.

(b) Estudiar la existencia de las integrales iteradas

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dx \right) dy \quad \text{y} \quad \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx.$$

2.- Definimos $f(x, y)$ en el cuadrado $C = [0, 1] \times [0, 1]$ como sigue:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 2y & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(a) Probar que la integral iterada $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx$ existe y es igual a 1.

(b) Demostrar que, no obstante, f no es integrable en C .

3.- Demostrar la existencia de la integral $\int_Q f(x+y) dx dy$, donde $Q = [0, 2] \times [0, 2]$ y $f(t) = [t]$ representa el mayor número entero $\leq t$. Hallar el valor de la integral.

4.- Hallar el valor de las siguientes integrales sobre los rectángulos indicados.

$$\begin{aligned} (a) \int_Q x^2 e^y dx dy, \quad Q &= [-1, 1] \times [0, \log 2]; & (b) \int_Q \sin(x+y) dx dy, \quad Q &= [0, \pi] \times [0, \pi]; \\ (c) \int_Q |xy| dx dy, \quad Q &= [-1, 2] \times [1, 3]; & (d) \int_Q \sin^2(3x-2y) dx dy, \quad Q &= [0, \pi] \times [0, \pi]. \end{aligned}$$

5.- Para cada una de las siguientes funciones f definidas en el rectángulo $Q = [0, 1] \times [0, 1]$, se pide representar el conjunto de los valores $f(x, y)$ sobre Q y calcular el volumen del sólido así obtenido. Determinar también en cada caso el conjunto

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in Q : f \text{ no es continua en } (x, y)\}.$$

$$(a) f(x, y) = \begin{cases} 1 - (x + y) & \text{si } x + y \leq 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (b) f(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{si } x^2 \leq y \leq 2x^2, \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

6.- Calcular el valor de la integral $\int_{\Omega} x \cos(x+y) dx dy$, siendo Ω el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(\pi, 0)$ y (π, π) .

7.- Calcular el valor de la integral $\int_D y dx dy$, donde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, 2x/\pi \leq y \leq \sin x\}$.

8.- Calcular el valor de la integral $\int_D x^3 y \sin \frac{\pi y^2}{x} dx dy$, donde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 \leq y \leq \sqrt{x}\}$.

- 9.- Una pirámide está limitada por los tres planos coordenados y el plano $x + 2y + 3z = 6$. Dibujar esta pirámide y calcular su volumen: a) de manera elemental; b) integrando.
- 10.- (a) Hallar el volumen de la región encerrada por la superficie $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 10$.
 (b) Lo mismo para la región acotada por la gráfica $z = e^{-x^2}$ y los planos $y = 0$, $y = x$ y $x = 1$.
- 11.- En los siguientes apartados, se supone que la integral de una función positiva f sobre la región Ω se reduce a la integral iterada que se da. En cada caso, se pide determinar y dibujar la región Ω e invertir el orden de integración.

$$(a) \int_0^2 \left(\int_{y^2}^{2y} f(x, y) dx \right) dy. \quad (b) \int_1^4 \left(\int_{\sqrt{x}}^2 f(x, y) dy \right) dx,$$

$$(c) \int_1^e \left(\int_0^{\log x} f(x, y) dy \right) dx. \quad (d) \int_0^\pi \left(\int_{-\sin x/2}^{\sin x} f(x, y) dy \right) dx.$$

- 12.- Invertiendo el orden de integración si fuese necesario, calcúlese la integral

$$\int_0^4 \int_{y/2}^2 e^{x^2} dx dy.$$

- 13.- Si $D = [-1, 1] \times [-1, 2]$, probar que

$$1 \leq \int_D \frac{dx dy}{x^2 + y^2 + 1} \leq 6.$$

- 14.- Hallar el valor de las siguientes integrales, determinando y dibujando en cada caso el recinto de integración.

(a) $\int_Q (2x + 3y + z) dx dy dz$, con $Q = [1, 2] \times [-1, 1] \times [0, 1]$.

(b) $\int_T x^2 \cos z dx dy dz$, siendo T la región limitada por los planos $z = 0$, $z = \pi$, $y = 0$, $y = 1$, $x = 0$, $x + y = 1$.

(c) $\int_\Omega x y^2 z^3 dx dy dz$, siendo Ω el sólido limitado por la superficie $z = x y$ y los planos $y = x$, $x = 1$ y $z = 0$.

- 15.- En cada uno de los siguientes casos, la integral $\int_\Omega f(x, y, z) dx dy dz$ de la función f se reduce a la integral iterada dada. Dibujar la región de integración $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ y su proyección sobre el plano $z = 0$. Escribir entonces la integral como una o varias integrales iteradas en las que integración se hace en el orden $dz dx dy$.

$$(a) \int_0^1 \left(\int_0^x \left(\int_0^y f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx. \quad (b) \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{x+y} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$$

$$(c) \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx. \quad (d) \int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$$