

## Hoja 5

## Derivadas de orden superior. Polinomios de Taylor. Máximos y mínimos

1.- Definamos la función

$$f(x, y) = \begin{cases} y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Estudiar la existencia de las siguientes derivadas parciales y, en su caso, calcular sus valores:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0).$$

2.- Sea

$$f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 0.$$

Compruébese que  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = -1$  y  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1$ .

¿Qué se puede decir acerca de la continuidad de las derivadas de segundo orden en el origen?

3.- El cambio de variable  $x = u + v$ ,  $y = uv^2$  transforma  $f(x, y)$  en  $g(u, v)$ . Calcular  $\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(1, 1)$ , sabiendo que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2, 1) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2, 1) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2, 1) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(2, 1) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2, 1) = 1$$

4.- Hallar el polinomio de Taylor de orden 2 centrado en  $(0, 0)$  de las siguientes funciones:

$$(a) \quad f(x, y) = x e^{x+y}. \quad (b) \quad f(x, y) = \sin xy + \cos xy. \quad (c) \quad f(x, y) = e^{x^2+y^2}.$$

5.- Comprobar que la función  $f(x, y) = e^y \cos x$  no tiene puntos críticos en  $\mathbb{R}^2$ .

6.- Hallar los puntos críticos y determinar cuáles son máximos locales, mínimos locales o puntos silla:

$$\begin{aligned} (a) \quad f(x, y) &= x^2 + y^2 + xy - 2x - 4y + 10. & (b) \quad f(x, y) &= 3x^2 - 4y^2 + xy. \\ (c) \quad f(x, y) &= x^3 + y^3 - 3xy. & (d) \quad f(x, y) &= 3 - x^2 - y^2 - x^4 y^2. \\ (e) \quad f(x, y) &= x \log(x^2 + y^2). & (f) \quad f(x, y) &= xy e^{x-y}. \\ (g) \quad f(x, y) &= xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}. & (h) \quad f(x, y) &= e^{xy} + x^2. \end{aligned}$$

7.- Hallar los posibles puntos de máximo, mínimo y de silla de las siguientes funciones:

$$(a) \quad f(x, y) = (x + y)^2. \quad (b) \quad f(x, y) = \log(2 + \sin xy). \quad (c) \quad f(x, y) = x^2 y^2.$$

8.- Considérese el polinomio  $f(x, y) = (y - 3x^2)(y - x^2)$  y la función  $g(t) = f(t, ct)$  de  $t \in \mathbb{R}$  con  $c \in \mathbb{R}$ . Demostrar que  $g$  tiene un mínimo en  $t = 0$ , pero el punto  $(0, 0)$  no es un mínimo local de  $f$ .

9.- (a) Demostrar que, para dos números no negativos arbitrarios,  $a$  y  $b$ , se cumple la desigualdad

$$\frac{a + b + 1}{3} \geq \sqrt[3]{ab}$$

y que la igualdad es posible si y sólo si  $a = b = 1$ .

(b) Deducir del apartado anterior que las medias aritmética y geométrica de tres números no negativos  $x$ ,  $y$  y  $z$  satisfacen la desigualdad

$$\frac{x + y + z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$$

y que la igualdad se cumple si y sólo si  $x = y = z$ .

10.- Escribir un número dado  $a > 0$  como producto de cuatro factores positivos, cuya suma sea mínima.

11.- Calcular las distancias máxima y mínima del origen a la elipse dada por la ecuación  $x^2 + 2xy + 3y^2 = 9$ .

12.- Encontrar los valores máximo y mínimo (absolutos) de  $f(x, y) = x^3 + 3xy^2$  en la región

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \leq y\}.$$

13.- Hallar los extremos de la función  $f(x, y) = x^2 - 3xy + y^2$  bajo la restricción  $x^2 + y^2 \leq 2$ .

14.- Hallar los extremos de la función  $f(x, y) = x^4 + x^2 + 2y^2$  en  $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \leq 25\}$ .

15.- Hallar los máximos y mínimos de la función

$$f(x, y) = \frac{1}{1 + (x - 2)^2 + y^2} \quad \text{en} \quad K = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 9\}.$$

16.- Para la función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x, y) = x^4 + y^4 + a(2x^2 + y^2)$ , se pide:

(a) Hallar sus máximos y mínimos relativos (locales) según los distintos valores del parámetro  $a$ .

(b) Hallar los valores máximo y mínimo de la función sobre el recinto  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$  en los casos  $a = -1$  y  $a = 5$ .

17.- Queremos construir una caja de carton con volumen fijo  $V_0$ . Hallar las dimensiones que minimizan la cantidad de cartón utilizada. ¿Que tipo de caja obtenemos?

18.- Se quiere construir una lata metálica con forma cilíndrica, sin la tapa superior y con una capacidad de 1 litro. ¿Cuales son las dimensiones que minimizan la cantidad de metal empleada?

19.- Se dispone de 12 decímetros cuadrados de metal para fabricar una lata cilíndrica con las dos tapas. ¿Qué dimensiones maximizan el volumen de dicha lata?