

Hoja 4

Funciones vectoriales. Regla de la cadena. Plano tangente a una superficie

1.- Sea $F(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$ con $u = \frac{x-y}{2}$, $v = \frac{x+y}{2}$. Aplicar la regla de la cadena para calcular $\nabla F(x, y)$ en función de las derivadas parciales de f , $\frac{\partial f}{\partial u}$ y $\frac{\partial f}{\partial v}$.

2.- Sean $f(x, y) = x^2 + y$, $g(u) = (\sin 3u, \cos 8u)$ y $h(u) = f(g(u))$. Calcular dh/du en $u = 0$ tanto de forma directa como usando la regla de la cadena.

3.- Las relaciones $u = f(x, y)$, $x = x(t)$ e $y = y(t)$ definen u como función escalar de t , digamos $u = u(t)$. Aplicar la regla de la cadena para la derivada de u respecto de t cuando

$$f(x, y) = e^{xy} \cos xy^2, \quad x(t) = \cos t, \quad y(t) = \sin t.$$

4.- La sustitución $t = g(x, y)$ convierte $F(t)$ en $f(x, y) = F(g(x, y))$. Calcúlese la matriz de $Df(x, y)$ en el caso particular en que $F(t) = e^{\sin t}$ y $g(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$.

5.- Las ecuaciones $u = f(x, y)$, $x = x(s, t)$ e $y = y(s, t)$ definen u como función de las variables (s, t) . Expresar las derivadas parciales $\frac{\partial u}{\partial s}$ y $\frac{\partial u}{\partial t}$, en términos de las diversas derivadas parciales de f , x e y . Resolver este mismo ejercicio en el caso particular en que $x(s, t) = st$, $y(s, t) = \frac{s}{t}$.

6.- Sean $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ funciones vectoriales definidas mediante

$$f(x, y) = (e^{x+2y}, \sin(2x+y)), \quad g(u, v, w) = (u + 2v^2 + 3v^3, 2v - u^2).$$

Hallar cada una de las matrices de $Df(x, y)$ y $Dg(u, v, w)$. Calcular la función compuesta $h(u, v, w) = f(g(u, v, w))$ y la matriz de $Dh(1, -1, 1)$.

7.- Sean f una función diferenciable en cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y $g = (g_1, g_2)$ la función vectorial

$$g(u, v, w) = (u^2 + v^2 + w^2, u + v + w).$$

Considérese la función compuesta $h = f \circ g$ y demuéstrese que

$$\|\nabla h\|^2 = 4 \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 g_1 + 4 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} g_2 + 3 \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2.$$

8.- (a) Hallar la función $\frac{\partial f}{\partial x}$, siendo $f(x, y) = \int_0^{\sqrt{xy}} e^{-t^2} dt$, definida para $x > 0, y > 0$.

(b) Hallar el valor de $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2)$, donde

$$f(x, y) = \int_0^{x^3-2y} e^{t^2} dt, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

9.- Supongamos que la ecuación $y^2 + xz + z^2 - e^z - k = 0$ define z como función de x e y , sea ésta $z = f(x, y)$. Hallar el valor de la constante k para el cual $f(0, e) = 2$ y calcular $\nabla f(0, e)$.

10.- Hállese la ecuación de los planos tangentes a las gráficas de las funciones:

(a) $f(x, y) = x^2 - y^2$, en el punto $(1, 1, 0)$.

(b) $f(x, y) = x^2 + y^2$ en un punto genérico (x_0, y_0, z_0) . ¿En qué puntos es el plano tangente paralelo al plano $x = z$?

11.- Hállese la ecuación del plano tangente a la superficie $x^2 - y^2 - z = 0$ en el punto $(1, 1, 0)$.

12.- Si (a, b, c) es un punto de la superficie $z = xy$, las dos rectas

$$\begin{cases} z = bx, \\ y = b, \end{cases} \quad y \quad \begin{cases} z = ay, \\ x = a, \end{cases}$$

se cortan en (a, b, c) y están situadas en la superficie. Comprobar que el plano tangente a esta superficie en el punto (a, b, c) contiene a esas dos rectas.

13.- Hallar la ecuación de la única recta tangente a las dos superficies $x^2 + y^2 + 2z^2 = 4$ y $z = e^{x-y}$ en el punto $(1, 1, 1)$.

14.- Hallar una constante c tal que en todo punto de la intersección de las dos esferas $(x - c)^2 + y^2 + z^2 = 3$ y $x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 1$, los planos tangentes correspondientes sean perpendiculares el uno a otro.

15.- Calcular las derivadas direccionales de las funciones:

(a) $f(x, y, z) = 3x - 5y + 2z$ en el punto $(2, 2, 1)$ en la dirección de la normal exterior a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

(b) $f(x, y, z) = x^2 - y^2$ en un punto cualquiera de la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, en la dirección de la normal exterior en dicho punto.