Solución

1) Para $(x,y)\neq(0,0)$ podemos escribir la función como

$$f(x,y)=f_1(x,y)f_2(x,y)\qquad \text{con}\quad f_1(x,y)=y+x\quad \text{y}\quad f_2(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

a) Claramente $|f_2(x,y)|\le 1$ (porque $x^2+y^2\ge x^2$) y $f_1(x,y)\to 0$ cuando $(x,y)\to(0,0)$, así pues $f(x,y)\to 0$ por el "teorema del sandwich". Al ser $f(0,0)=0$, se deduce que f es continua en el origen.

b) Para $h\neq 0$, $f_1(h,0)=f_1(0,h)=h$, $f_2(h,0)=h/|h|$, $f_2(0,h)=0$ y $f(0,0)=0$, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{|h|}\quad \text{y}\quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}.$$

Así pues la primera derivada parcial no existe ($h/|h|$ vale uno por la derecha y menos uno por la izquierda) y la segunda es cero. Como una de las parciales no existe, f no es diferenciable.

2) La región R de la que queremos hallar el volumen está determinada por $\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{4-3x^2-3y^2}$ que en coordenadas cilíndricas es $r\le z\le\sqrt{4-3r^2}$ lo que fuerza a que $r\le 1$ para que el intervalo no sea vacío. Por tanto $\text{Vol}(R)=\iiint_R 1$ es

$$\int_0^1\int_r^{\sqrt{4-3r^2}}\int_0^{2\pi} r\,d\alpha dz dr=2\pi\int_0^1\big(r(4-3r^2)^{1/2}-r^2\big)\,dr=2\pi\Big(-\frac{1}{6}\frac{(4-3r^2)^{3/2}}{3/2}-\frac{r^2}{3}\Big)\Big|_0^1$$

y el volumen buscado es $8\pi/9$.

3) El sistema dado por las ecuaciones de ambas superficies equivale a $x^2+y^2=3$, $z=1$ (porque $3z+z^2=4$ implica $z=1,-4$ pero $z=-4$ no es compatible con la primera ecuación). Esta curva se parametriza con $\sigma(t)=(\sqrt{3}\cos t,\sqrt{3}\operatorname{sen} t,1)$, $t\in[0,2\pi]$, lo cual corresponde a sentido antihorario visto desde arriba del eje Z. Por definición, $\int_C\vec{F}$ viene dado por

$$\int_0^{2\pi}\vec{F}\big(\sigma(t)\big)\cdot\sigma'(t)\,dt=\int_0^{2\pi}\big(2\sqrt{3}\operatorname{sen} t,\sqrt{3}\cos t,9\operatorname{sen} t\cos t\big)\cdot\big(-\sqrt{3}\operatorname{sen} t,\sqrt{3}\cos t,0\big)\,dt.$$

Operando y usando $\operatorname{sen}^2 t=\frac{1}{2}\big(1-\cos(2t)\big)$ y $\cos^2 t=\frac{1}{2}\big(1+\cos(2t)\big)$, esto es

$$\int_0^{2\pi}\big(-6\operatorname{sen}^2 t+3\cos^2 t\big)\,dt=\int_0^{2\pi}\frac{-3+9\cos(2t)}{2}\,dt=-3\pi.$$

4) a) V. Sean π el plano pedido, $P=(3,-2,3)\in\pi$ y $Q=(0,0,-1)$. Es una superficie de nivel de $f(x,y,z)=e^{x+y-1}+x-z$ por tanto $\nabla f=\big(e^{x+y-1}+1,e^{x+y-1},-1\big)$ es perpendicular a ella en cada punto y como $\overline{PQ}=(-3,2,-4)\perp\nabla f(P)=(2,1,-1)$, se deduce $Q\in\pi$.

b) V. Por lo visto en clase o por un cálculo directo, $\vec{G}(\vec{x}) = \vec{x}/\|\vec{x}\|^3$ cumple div $\vec{G}(\vec{x}) = 0$ para $\vec{x} \neq \vec{0}$. Por tanto el campo del enunciado que es $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{G}(\vec{x} - \vec{x}_0)$ con $\vec{x}_0 = (2019, 0, 0)$, también cumple div $\vec{F}(\vec{x}) = 0$ para $\vec{x} \neq \vec{x}_0$. Como $\vec{x}_0$ no está en la esfera unidad, el teorema de Gauss asegura que la integral es cero.

c) F. Por ejemplo $f(x,y) = x^2 + y^3 - 3y$ tiene como únicos puntos críticos $P_+ = (0,1)$ y $P_- = (0,-1)$ y la matriz Hessiana es $H(P_\pm) = \text{diag}(2, \pm 6)$ así que en P_+ se alcanza un mínimo local y en P_- un punto de silla. Sin embargo $f(0,-2019) < f(P_+)$.

Criterios de corrección y comentarios

1) a) También se puede hacer usando coordenadas polares.

b) Equivocarse en una de las parciales (típicamente el error con el valor absoluto) pero probar coherentemente la no diferenciabilidad, cuenta un punto. Cuando las derivadas parciales son continuas la función es diferenciable pero el recíproco no es cierto en general.

2) Los errores numéricos leves descuentan en general 0.25 cada uno. La ecuación $x^2 + y^2 = z^2$ es un doble cono pero la gráfica de $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ es solo la parte superior.

3) Aunque requiere más cálculos, también se podía hacer con el teorema de Stokes. En ese caso lo más natural es tomar como superficie $z = 1$, $x^2 + y^2 < 3$.

4) Decir solo verdadero o falso sin justificar nada, no puntúa.

a) Este es un problema con unas cuentas numéricas extremadamente simples, equivocarse en ellas siempre descuenta algo.

b) El cálculo directo de la divergencia no es tan complicado. Abreviando $L = \big((x-2019)^2 + y^2 + z^2\big)^{1/2}$ las parciales son, derivando como un cociente:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{L^3 - 3(x-2019)^2 L}{L^6}, \qquad \frac{\partial F_2}{\partial y} = \frac{L^3 - 3y^2 L}{L^6}, \qquad \frac{\partial F_3}{\partial z} = \frac{L^3 - 3z^2 L}{L^6}.$$

Entonces div $\vec{F} = 0$ se deduce de $3L^3 = 3\big((x-2019)^2 + y^2 + z^2\big)L$.

Algunos procedéis como si el campo fuera $\vec{x}/\|\vec{x}\|^3$ y concluis que el resultado es 4π porque el origen está en la esfera unidad. No considerar la influencia de la traslación cuenta 0.75. El teorema de Stokes o los campos conservativos no tienen nada que ver aquí. Esos argumentos no puntúan nada.

c) Este es un problema "para nota" y por tanto he sido exigente con que las explicaciones sean correctas. Las dos maneras de conseguir el 0.5 son dar la ecuación de un contraejemplo razonado o dar un dibujo con explicaciones muy precisas. Casi todo lo demás no cuenta nada.

Quizá lo intuitivamente más sencillo sea radializar un contraejemplo $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, en este sentido puede que $(x^2 + y^2)(1 - x^2 - y^2)$ sea más fácil de entender que la f de la solución anterior.

El enunciado decía que hubiera un <u>único</u> mínimo local. Cualquier contraejemplo que tenga varios mínimos locales no es válido. Tampoco son válidos ejemplos donde f no esté definida de manera unívoca, como el hiperboloide de dos hojas $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ que daría $f(x,y) = \pm\sqrt{x^2 + y^2 + 1}$. Aunque un ejemplo $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ puede dar intuición, no es lo que pide el problema y por tanto no puntúa.