Segundo parcial de Cálculo II, 5/Abr/2019 (Solución y criterios)

Solución

1) Se tiene, por definición,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h-0}{h} = 1.$$

Por tanto $\partial f/\partial x$ existe en el origen y vale 1. En el resto de los puntos

$$(*)\qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 1 + 3x^2y^3\frac{1}{x^2+y^2} - 2x^4y^3\frac{1}{(x^2+y^2)^2} = 1 + 3y^3\frac{x^2}{x^2+y^2} - 2y^3\Big(\frac{x^2}{x^2+y^2}\Big)^2.$$

Entonces

$$\frac{x^2}{x^2+y^2}\in[0,1] \text{ para } (x,y)\neq(0,0) \quad\Rightarrow\quad \lim_{(a,b)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 1 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

y se deduce que $\partial f/\partial x$ es continua en $(0,0)$, de hecho en $\mathbb{R}^2$ porque en el resto de los puntos es cociente de funciones continuas con denominador no nulo, por (*).

Por la simetría $f(x,y) = f(y,x)$ se tiene que $\partial f/\partial y$ es también continua en $\mathbb{R}^2$ y la continuidad de las parciales implica, según la teoría, la diferenciabilidad en $(0,0)$ (y en $\mathbb{R}^2$).

2) Aplicamos el método de los multiplicadores de Lagrange con $f(x,y) = d^2\big((x,y),(0,0)\big) = x^2+y^2$ y $g(x,y) = x^2+y^2+6xy+4$. Se tiene $\nabla f = (2x,2y)$ y $\nabla g = (2x+6y, 6x+2y)$. Como $\nabla g = (0,0)$, donde no funciona el método, implica $(x,y) = (0,0)$ que no está en la curva, no hace falta contemplarlo. La ecuación $\nabla f = \lambda\nabla g$ conduce a

$$x = \lambda(x+3y),\quad y = \lambda(3x+y) \quad\Rightarrow\quad (3x+y)x = (x+3y)y.$$

Operando se sigue $x^2 = y^2$. Como $g(x,x)\neq 0$, la única posibilidad es $x = -y$ para la que $g(-y,y) = 0$ lleva a $-4y^2+4 = 0$, es decir, $y = \pm 1$, resultando $(-1,1)$ y $(1,-1)$ que claramente satisfacen el sistema con $\lambda = -1/2$. Estos puntos distan $\sqrt{2}$ del origen, por tanto esta es la distancia mínima y se alcanza solamente en ellos. Que sea un mínimo lo asegura el enunciado.

3) Sea $g(x,y,z) = xf(y/x) - z$. Por la regla de la cadena

$$\frac{\partial g}{\partial x} = f\big(\frac{y}{x}\big) + xf'\big(\frac{y}{x}\big)\cdot\frac{-y}{x^2},\qquad \frac{\partial g}{\partial y} = xf'\big(\frac{y}{x}\big)\cdot\frac{1}{x},\qquad \frac{\partial g}{\partial z} = -1.$$

Así pues $\nabla g\big(1,4,f(4)\big) = \big(f(4)-4f'(4), f'(4), -1\big)$. La superficie del enunciado es la superficie de nivel $g = 0$ y por tanto su plano tangente en el punto indicado es

$$\pi \equiv \big(f(4)-4f'(4)\big)(x-1) + f'(4)(y-4) + (-1)\big(z-f(4)\big) = 0.$$

Operando, $\big(f(4)-4f'(4)\big)x + f'(4)y - z = 0$ y está claro que $(0,0,0)$ satisface esta ecuación.

Criterios de corrección y comentarios

1) Existencia, continuidad y diferenciabilidad contaban 1, 1.5 y 1.5, respectivamente. La continuidad de f no se pedía en el enunciado ni aparece en la solución, por tanto no se evalúa. Parece que algunos la habéis confundido con la de $\partial f/\partial x$. Es un error serio decir que el límite existe porque existen los límites direccionales y coinciden. Lo es más concluir que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ porque $f(0,0) = 0$, es decir, derivar cada uno de los trozos que definen la función.

2) Aunque no penaliza considerar más puntos de los necesarios (por ejemplo por la posible anulación de denominadores, según el método usado), sí lo hace, con -0.25, considerar casos incoherentes. Algunos obtenéis $(1,1)$ alcanzando el mínimo pero tal punto no está en la curva. Por otro lado, hay algunos casos de errores "de cuentas". Están penalizados dependiendo de su magnitud e influencia en el resultado, típicamente con -0.25 o -0.5.

3) Utilizar bien la regla de la cadena y saber hallar planos tangentes cuenta 1.75 y 1.25, respectivamente. Es decir, nadie con problemas serios con la regla de la cadena ha obtenido más de 1.25 en el ejercicio. Algunos llegáis a resultados condicionales dependiendo de las "parciales de f". Para $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ no tienen sentido las parciales, solo la derivada total f'. La ecuación implícita de un plano es de la forma $Ax+By+Cz+D=0$ con A, B, C, D constantes. Algunos escribís ecuaciones de segundo grado o dependientes de $f(y/x)$.