¿Y si explota todo?

Fernando Chamizo

30 de enero de 2019

Los que vivieron la movida de los ochenta saben que la respuesta es "dejaré de vacilar", el resto tienen la oportunidad de aprender en las siguientes líneas un resultado sorprendente y no demasiado divulgado sobre gravitación llamado *Teorema del colapso total de Sundman*. Lo más llamativo es su sencillez, pues su prueba es asequible a cualquiera que tenga conocimientos someros de cálculo vectorial y algún contacto con la mecánica más básica. Incluso si el último requisito no se cumple, la idea es que lo que se incluye aquí sea suficiente siempre que vectores, derivadas y la desigualdad de Cauchy-Schwarz estén en tu caja de herramientas matemática.

1. ¿Quién teme a los N cuerpos?

Los cuerpos con masa ejercen atracción gravitatoria unos sobre otros. Cuando hay solo dos de ellos, la evolución se entiende perfectamente debido al trabajo pionero de Newton: en un sistema de referencia adecuado ambos cuerpos describen cónicas de esas que estudiaron los antiguos griegos en tiempos inmemoriales. Estéticamente y matemáticamente, si es que hay diferencia, esto es muy notable, además de nada sencillo de probar. Añadir otra masa para llegar al *problema de los tres cuerpos* constituye un salto cualitativo que todavía es tema de investigación. La literatura de divulgación da una idea a veces confusa diciendo que es un problema insoluble. Aunque esto es un poco exagerado [Dia96], el hecho es que el comportamiento de tres masas puntuales bajo la acción de la gravedad es tan caótico que causó una pequeña revolución encontrar en el año 2000 una solución "sencilla" cuando las tres masas son iguales [CM00], solo se conocía otra "sencillísima" debida a Lagrange [Gei16, §7.1]. Si las cosas están así para el problema de los tres cuerpos, pinta muy mal poder decir algo cuando se consideran N cuerpos con N genérico.

En 1885 se ofreció un premio patrocinado por el rey Óscar II de Suecia y Noruega por encontrar una solución en forma de serie para el problema de N cuerpos suponiendo que no sufrían colisiones. El premio se otorgó en enero de 1889 coincidiendo con el 60 aniversario del monarca y recayó sobre Poincaré que no consiguió resolver el problema pero introdujo importantes nuevas ideas (tal posibilidad estaba dentro de las bases). Weierstrass dijo que su publicación inauguraría una nueva era en la historia de la mecánica celeste. Dicho sea de paso, este premio fue amargo para Poincaré pues cometió un error en su trabajo y gasto una pequeña fortuna, superior a la cuantía recibida, en reimprimir los ejemplares ya publicados [BG97].

K.F. Sundman, un astrónomo y matemático finlandés, consiguió resolver el problema original a principios del siglo XX para el caso de tres cuerpos incluso en una versión algo más fuerte. En su trabajo [Sun13] obtuvo un desarrollo en serie de la solución válido para todo tiempo y la única hipótesis que necesitaba es que los tres cuerpos no coincidieran en ningún momento en el mismo punto, que no hubiera una colisión triple. Es ahí donde entra el "Teorema del colapso total de Sundman" que bajo una condición sencilla y asumible desde el punto de vista físico asegura que tal colapso gravitacional no se produce. El argumento es simple y deliciosamente general, funciona igualmente para N cuerpos impidiendo que explote todo debido a que los cuerpos choquen simultáneamente en un mismo punto. A la postre, siempre dejando lugar a la opinión, se podría decir que este resultado que fue auxiliar para Sundman ha cobrado más importancia que su propia solución del problema de los tres cuerpos, la cual es inútil para cálculos numéricos astronómicos reales [Vol08].

2. La fuerza de la gravedad y sus ecuaciones

Todos sabemos eso de que la fuerza de la gravedad es proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al producto de las distancias. Con fórmulas, dos masas m_1 y m_2 en los puntos $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ del espacio $\mathbb{R}^3$ habitual se atraen con una fuerza de módulo $Gm_1m_2/\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^2$. Para ser más precisos, si queremos indicar que la dirección es la línea que une las masas, el vector fuerza es $Gm_1m_2(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)/\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^3$. Ahora se tiene eso de que la fuerza es la masa por la aceleración, el alias físico de la derivada segunda. Entonces las masas se comenzarán a mover modificando las distancias en cada instante y haciendo que todo sea un gran barullo.

Traduciendo en el párrafo anterior barullo por sistema dinámico regido por ecuaciones diferenciales, se tiene que las posiciones $\vec{r}_1(t), \dots, \vec{r}_N(t)$ de N cuerpos bajo la acción de la gravedad mutua son las soluciones del siguiente sistema de $3N$ ecuaciones diferenciales ordinarias, N por cada una de las tres coordenadas:

$$m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \frac{Gm_im_j\big(\vec{r}_j - \vec{r}_i\big)}{\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|^3}, \qquad i = 1, 2, \dots, N. \tag{2.1}$$

Seguro que aunque sea vagamente has escuchado eso de la conservación de la energía y quizá incluso del momento angular. En este ejemplo significa que las siguientes cantidades permanecen constantes cuando t varía para cada solución fijada de (2.1):

$$E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \Big\|\frac{d\vec{r}_i}{dt}\Big\|^2 - \sum_{1\le i<j\le N} \frac{Gm_im_j}{\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|} \qquad \text{y} \qquad \vec{L} = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i \times \frac{d\vec{r}_i}{dt}. \tag{2.2}$$

Los irremisiblemente matemáticos y menos avezados en la física básica no estarán tan interesados en desentrañar el significado de los nombres *energía* y *momento angular* para E y $\vec{L}$ como en demostrar matemáticamente que (2.1) implica que son constantes. Para ellos hay un apartado más adelante.

El primer término de E se llama *energía cinética* y se suele denotar con T. Como su nombre indica, es la parte de la energía que proviene del movimiento, de que los cuerpos tengan velocidad. El segundo término con su signo se llama *energía potencial*, se suele denotar con V y solo depende de la posición de las partículas (los cuerpos) que conforman el sistema. Con esta notación

$$E = T + V. \tag{2.3}$$

Por otro lado $\vec{L}$ está relacionado en cierto sentido con lo que gira el sistema. Una partícula que sigue una trayectoria recta que pasa por el origen tiene $\vec{L} = \vec{0}$ mientras que si recorre una circunferencia de radio r con velocidad v entonces $\vec{L}$ será mrv en la dirección perpendicular al plano de la circunferencia.

Como disculpa a los tiquismiquis aclararé que estamos suponiendo implícitamente, como es habitual, que los cuerpos son puntuales y que no estamos en condiciones extremas de gravedad donde la mecánica de Newton que sustenta (2.1) deja de ser válida. Para los supertiquismiquis, identificamos sin pudor los puntos con los radiovectores que los representan.

3. La formulación matemática y la demostración

La ecuación i-ésima de (2.1) deja de tener sentido en tiempo $t = t_c$ si $\vec{r}_i(t_c) = \vec{r}_j(t_c)$ para cierto $j \neq i$. El colapso total ocurre cuando todas las ecuaciones dejan de tener sentido simultáneamente, es decir, cuando en el tiempo t_c, el tiempo del colapso, todas las posiciones $\vec{r}_i$ coinciden en un mismo punto $\vec{p}_0$. Para ser rigurosos, solo debemos hablar de soluciones cunado tenemos ecuaciones lo cual no ocurre en el tiempo t_c. Así una solución que colapsa totalmente son unas $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2,\dots$, $\vec{r}_N$ que partiendo de condiciones iniciales en $t = t_a$, el tiempo actual, evolucionan para $t_a < t < t_c$ sin que haya coincidencias entre las $\vec{r}_i$ y de modo que sus límites cuando $t \to t_c^-$ sean un punto fijado $\vec{p}_0$, el punto donde se produce el colapso total.

Parece claro que situando N masas inicialmente en reposo en los vértices de un polígono regular y dejándolas evolucionar bajo la acción de la gravedad se produce un colapso total. Ciertamente es bastante artificial pensar que aparecen de pronto planetas en reposo de la nada. Los modelos aceptados de formación de galaxias o sistemas planetarios involucran cierto giro, de modo que los sistemas astronómicos bajo la acción de la gravedad tienen $\vec{L} \neq \vec{0}$.

Tras estas consideraciones, el teorema del colapso total de Sundman admite la siguiente formulación matemática:

Teorema. *Una solución de* (2.1) *con* $\vec{L} \neq 0$ *definida en un intervalo* $t \in (t_a, t_c)$ *no puede cumplir* $\lim_{t\to t_c^-} \vec{r}_i(t) = \vec{p}_0$ *para todo* $i = 1, 2, \dots, N$ *y cierto* $\vec{p}_0 \in \mathbb{R}^3$.

Vamos con la demostración.

Dada una solución de (2.1), cambiar $\vec{r}_i$ por $\vec{r}_i - \vec{p}_0$ da también lugar a una solución por tanto se puede suponer $\vec{p}_0 = \vec{0}$. Lo que hay que probar es que $\vec{L} = \vec{0}$ es incompatible con

$$\lim_{t\to t_c^-} I(t) = 0 \qquad \text{donde} \quad I = \sum_{i=1}^{N} m_i \|\vec{r}_i\|^2. \tag{3.1}$$

Esta cantidad I está emparentada con un viejo conocido de los cursos de mecánica, el momento de inercia. Eso es irrelevante aquí, lo único que nos interesa es que por derivación directa de $\|\vec{r}_i\|^2 = \vec{r}_i \cdot \vec{r}_i$ se tiene

$$\frac{d^2 I}{dt^2} = 2\sum_{i=1}^{N} m_i \Big\| \frac{d\vec{r}_i}{dt} \Big\|^2 + 2\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \cdot \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = 2T + 2\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \cdot \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}. \tag{3.2}$$

Abreviando $Gm_im_j\vec{r}_i \cdot (\vec{r}_j - \vec{r}_i)/\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|^3$ como a_{ij}, la última suma es, gracias a (2.1),

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} a_{ij} = \sum_{1\le i<j\le N} a_{ij} + \sum_{1\le i<j\le N} a_{ji} = \sum_{1\le i<j\le N} \big(a_{ij} + a_{ji}\big) = V. \tag{3.3}$$

Con ello tenemos

$$\frac{d^2 I}{dt^2} = 4T + 2V \qquad \text{o equivalentemente} \qquad 2T = \frac{d^2 I}{dt^2} - 2E. \tag{3.4}$$

Por otro lado, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|\vec{L}|^2 \le \Big(\sum_{i=1}^{N} m_i \|\vec{r}_i\| \Big\| \frac{d\vec{r}_i}{dt} \Big\| \Big)^2 \le 2IT = I\Big(\frac{d^2 I}{dt^2} - 2E \Big). \tag{3.5}$$

Obviamente $V \to -\infty$ cuando $t \to t_c^-$ y por tanto, sustituyendo T por $E - V$ en (3.4), $I = I(t)$ es una función convexa en un intervalo $[t_c - \epsilon, t_c)$. Además como $I(t_c^-) = 0$ e $I > 0$, debe ser decreciente en dicho intervalo y multiplicar por su derivada cambia la desigualdad en (3.5). De este modo

$$|\vec{L}|^2 \frac{1}{I} \frac{dI}{dt} \ge \frac{dI}{dt} \frac{d^2 I}{dt^2} - 2E \frac{dI}{dt}. \tag{3.6}$$

Si ahora integramos en el intervalo $[t_c - \epsilon, t]$ donde $t \in [t_c - \epsilon, t_c)$, se sigue

$$|\vec{L}|^2 \log I + K \ge \frac{1}{2} \Big(\frac{dI}{dt} \Big)^2 - 2EI \tag{3.7}$$

con K una constante. Recordemos que $|\vec{L}|$ y E son a su vez constantes, por tanto si $|\vec{L}| \neq 0$ cuando $t \to t_c^-$ la desigualdad nos estaría diciendo que $-\infty$ es mayor que cierto número. Una flagrante contradicción.

4. Si andas apurado con la física básica. . .

. . . y tienes alguna inquietud matemática, habría que añadir, entonces quizá estés intrigado por eso de que la energía y el momento angular de (2.2) permanezcan constante para cada solución a lo largo del tiempo.

El tic matemático que uno tiene del cálculo infinitesimal es identificar constante con derivada igual a cero. La dificultad radica en que hay que aprovechar las simetrías al hacer las cuentas. El razonamiento es más transparente en el caso del momento angular y comenzamos por él. Simplemente derivamos y sustituimos (2.1), siempre recordando $\vec{x}\times\vec{x}=\vec{0}$, para obtener

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i\times\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}=\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\frac{Gm_im_j\vec{r}_i\times\vec{r}_j}{\|\vec{r}_j-\vec{r}_i\|^3}. \tag{4.1}$$

El producto vectorial cambia de signo al intercambiar sus factores por tanto los sumandos se cancelan a pares.

En el caso de la energía, el cálculo inicial empleando la regla de la cadena es más aparatoso:

$$\frac{dE}{dt}=\sum_{i=1}^{N} m_i\frac{d\vec{r}_i}{dt}\cdot\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}+\sum_{1\le i<j\le N}\frac{Gm_im_j(\vec{r}_j-\vec{r}_i)}{\|\vec{r}_j-\vec{r}_i\|^3}\cdot\frac{d}{dt}(\vec{r}_j-\vec{r}_i). \tag{4.2}$$

Por la simetría de la última suma en i y j se pueden incluir los términos $1\le j<i\le N$ a cambio de dividir el resultado por 2. Teniendo esto en cuenta y usando (2.1) para sustituir la derivada segunda en la primera suma, se tiene

$$\frac{dE}{dt}=\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\frac{Gm_im_j(\vec{r}_j-\vec{r}_i)}{\|\vec{r}_j-\vec{r}_i\|^3}\cdot\Big(\frac{d\vec{r}_i}{dt}+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\vec{r}_j-\vec{r}_i)\Big)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\frac{Gm_im_j(\vec{r}_j-\vec{r}_i)}{2\|\vec{r}_j-\vec{r}_i\|^3}\cdot\frac{d}{dt}(\vec{r}_j+\vec{r}_i). \tag{4.3}$$

De nuevo los sumandos se cancelan a pares al intercambiar i y j.

Estas leyes de conservación no son exclusivas de las interacciones gravitatorias. Siempre que las fuerzas involucradas se puedan escribir como el gradiente de algo, hay conservación de la energía cambiando V por ese algo [FLS63, §14-5]. Por otro lado, siempre que la fuerza entre dos partículas de un sistema apunte en la dirección de la línea que los une, hay conservación del momento angular [FLS63, §18-4].

5. ¿Y qué hay de lo nuestro?

Si consideramos los planetas y el propio Sol como masas puntuales, el momento angular del Sistema Solar es esencialmente el orbital de los planetas cuya suma es más de $3\cdot 10^{43}\,kg\,m^2/s$

en módulo lo cual a escala humana no se parece mucho a cero. Así que entre tanto anuncio apocalíptico que nos da el telediario todos los días puedes mirar el resultado de Sundman y dar un respiro.

Si eres un pesimista o un curioso, continúa leyendo. Para abrir boca, ¿qué te importa más, que explote todo o que choquen la Tierra y Marte? A efectos de quedar pulverizado no hay grandes diferencias y eso lleva a la pregunta matemática de si pueden existir colapsos no totales. Se conoce que las condiciones iniciales en (2.1) que llevan a trayectorias de colisión tienen "probabilidad cero", en cierto sentido matemático, entre todas las posibles condiciones iniciales [Saa75]. De modo que si las cosas no están hechas a mala idea no hay colisiones aunque siempre se puede creer, negando radicalmente a Leibniz, en el peor de los mundos posibles. Una objeción más fuerte es que tanto este resultado como el de Sundman se basan firmemente en que los cuerpos son puntuales, no tienen grosor. Con partículas muy gordas es de esperar que choquen mucho. Digan lo que digan los teoremas, basta mirar a la Luna con un telescopio para observar que está llena de cráteres y al menos una de las grandes extinciones en la Tierra se achaca al impacto de un meteorito. Para los que se acojan al "si no lo veo no lo creo", el cometa Shoemaker-Levy 9 impactó no hace tantos años contra Júpiter ofreciendo un espectáculo glorioso para los astrónomos. Uno podría argumentar ante estos ejemplos que se cree (aunque no está claro) que muchos de los cráteres de impacto de la Luna se produjeron durante el *bombardeo intenso tardío*, un periodo en el que el Sistema Solar todavía estaba en formación. Por otro lado, Júpiter es realmente muy gordo, como la décima parte del Sol en cuanto a diámetro, si consuela a alguien la Tierra es enana en comparación. Volviendo a ella, el meteorito causante de una de las grandes extinciones cayó hace 66 millones de años y los seres humanos anatómicamente modernos llevan sobre la Tierra alrededor del 0.3 % de ese tiempo. Aunque no impide que el año que viene acabe con nosotros un meteorito, también cabe mencionar que el espacio está bastante vacío en el Sistema Solar en contra de lo que sugiere a veces la ciencia ficción y los tupidos puntos con que a veces se representa el cinturón de asteroides. Aquí va un pequeño ejercicio práctico al respecto. Todos sabemos que la Luna está cerca de la Tierra. Coge una naranja y una cereza, la proporción de los tamaños es similar a la que hay entre los de la Tierra y la Luna. Aleja las frutas a la distancia que creas a ojo que representa en proporción la distancia real entre ellas y después consulta los datos astronómicos para ver lo cerca que te has quedado. ¡Muy pocos tienen una idea aproximada de la realidad!

Mientras explota todo o no, puedes pasar el tiempo aprendiendo algo. Dentro de mis pobres conocimientos sobre el tema, dos libros básicos y bien escritos de aspectos matemáticos básicos de la mecánica celeste son [Gei16] y [Pol76]. Si prefieres una orientación más cercana a la astronomía, una buena referencia es [MD99].

Referencias

[BG97] J. Barrow-Green. *Poincaré and the three body problem*, volume 11 of *History of Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI; London Mathematical Society, London, 1997.

[CM00] A. Chenciner and R. Montgomery. A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses. *Ann. of Math. (2)*, 152(3):881–901, 2000.

[Dia96] F. Diacu. The solution of the n-body problem. *Math. Intelligencer*, 18(3):66–70, 1996.

[FLS63] R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands. *The Feynman lectures on physics. Vol. 1: Mainly mechanics, radiation, and heat.* Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass.-London, 1963.

[Gei16] H. Geiges. *The geometry of celestial mechanics*, volume 83 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 2016.

[MD99] C. D. Murray and S. F. Dermott. *Solar system dynamics.* Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[Pol76] H. Pollard. *Celestial mechanics.* Mathematical Association of America, Washington, D. C., 1976. Carus Mathematical Monographs, No. 18.

[Saa75] D. G. Saari. Collisions are of first category. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 47:442–445, 1975.

[Sun13] K. F. Sundman. Mémoire sur le problème des trois corps. *Acta Math.*, 36:105–179, 1913.

[Vol08] S. B. Volchan. Some insights from total collapse in the N-body problem. *Amer. J. Phys.*, 76:1034–1039, 2008.