Maxwell y las matrices de la relatividad

Fernando Chamizo

18 de febrero de 2019

Diálogos del físico desaforado y la matemática indolente

FD–Una de las cosas que más me gusta de la física es lo variada que es. De las dos revoluciones del siglo XX, la relatividad surgió como pura teoría mientras que la cuántica vino de los experimentos. Antes de que se viera que los electrones se volvían más "gordos", más masivos, con la velocidad o que los muones fueran más longevos cuando iban rápido, todo aquello se dedujo teóricamente tomando como base las ecuaciones de Maxwell.

MI–Si te soy sincera, yo con mi cabeza física creo firmemente que las ecuaciones de Maxwell son invariantes por el grupo de Lorentz pero mi corazón matemático no siente que el grupo de Lorentz sea lo que deja fijo las ecuaciones de Maxwell.

FD–No entiendo qué quieres decir, a mí me suena igual que sean invariantes por el grupo de Lorentz y que el grupo de Lorentz las deje invariantes.

MI–Lo que digo es que en contra de lo que parece aseverarse de muchos textos, no creo que dándole a alguien las ecuaciones de Maxwell sin hablar para nada de campos eléctricos y magnéticos, deduzca el grupo de Lorentz como única posibilidad.

FD–Pues Poincaré era más matemático que otra cosa y algunos incluso mantienen que llegó a la relatividad especial antes que Einstein.

MI–Sí, pero él pensaba en el electrón. No me gusta hacer divisiones severas entre física y matemáticas pero, a mi juicio, las matemáticas no son lo único aquí.

FD–Si eso fuera así me deberías dar otra transformación que preserva las ecuaciones.

MI–No sé, por ejemplo multiplicar por dos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ no cambia las ecuaciones de Maxwell en el vacío.

FD–Eso no es válido por muchas razones. Debe depender de la velocidad relativa y cuando esta sea cero debe ser trivial, en otro caso observadores idénticos medirían campos electromagnéticos diferentes.

MI–¿Observadores? ¿velocidades relativas? Nada de eso está en las ecuaciones. De todas formas, multiplica por $1 + v^2$ que es no hacer nada si $v = 0$.

FD–Es absurdo por lo mismo. Si tu vecino va a velocidad v con respecto de ti, tú vas a velocidad $-v$ con respecto de él en sentido contrario y entonces tus mediciones se multiplicarían por $(1 + v^2)^2$ sin hacer nada. Además tu idea de multiplicar no tiene sentido porque parte del campo eléctrico en movimiento se debe transformar en campo magnético y viceversa.

MI–Ya veo, para la deducir la relatividad del electromagnetismo hay que suponer cierta relatividad y además algo de electromagnetismo.

FD–¡Uf! Me parece que dejarse llevar por las pasiones no es muy provechoso en Ciencia. Deberías permitir que tu cabeza física controlase tus impulsos matemáticos.

MI–¡Qué poco romántico!

1. Las ecuaciones

Con las unidades llamadas gaussianas, en el espacio libre, sin cargas ni corrientes, las ecuaciones de Maxwell para la *intensidad de campo eléctrico* $\vec{E}$ y la *inducción magnética* $\vec{B}$ tienen el formidable aspecto

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0, \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0, \qquad \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \qquad \nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{1.1}$$

donde c es la velocidad de la luz. Si todavía no te han dado miedo es que conoces la notación. Para un campo vectorial $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ se definen

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \qquad \text{y} \qquad \nabla \times \vec{F} = \Big(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\Big). \tag{1.2}$$

Con estos formulones suena increíble que (1.1) provenga de resultados experimentales, con la excepción del último término de la última ecuación, que fue la contribución novedosa de Maxwell con una justificación originalmente solo teórica. Más allá de ese término, su famoso tratado [Max54] marcó un antes y un después en la física teórica. Dio a la electrodinámica un fundamento matemático muy lejos de las ideas intuitivas de Faraday y se mostraría como un modelo fundamental en el desarrollo de la física hasta nuestros días.

Lo que esconde (1.1) son unas igualdades integrales a través del llamado genéricamente *teorema de Stokes*, una de cuyas primeras pruebas se debe a Maxwell. Él acuñó el nombre de *divergencia* para $\nabla \cdot \vec{F}$ porque en cada punto es el límite de $\epsilon^{-3} \int_{S_\epsilon} \vec{F}$ con S_ϵ la superficie de un cubo de radio ϵ alrededor de dicho punto haciendo honor a su nombre. La integral de superficie $\int_{S_\epsilon} \vec{F}$ es el flujo del campo, la medida de cuánto campo sale a través de la superficie y la divergencia es entonces la tasa de esa salida en cada punto. Por otra parte cada coordenada del *rotacional* $\nabla \times \vec{F}$ está relacionado en cierto modo con la tasa de giro de $\vec{F}$ en una curva plana. De esta forma las dos primeras ecuaciones se traducen en algo así como que las líneas de fuerza que entran en una superficie tienen que salir de ella por algún sitio, la tercera está relacionada con que un imán que se mueve crea una corriente eléctrica en un conductor y la cuarta proviene en un ámbito más general de la conservación de la carga aunque para campos electromagnéticos generados por cargas e imanes macroscópicos es casi indistinguible de $\nabla \times \vec{B} = 0$.

Ahora que ya he creado expectación es hora de no decir mucho más de (1.1) con la excusa de falta de espacio y recomendar [FLS64] y [Gar15]. Los que tengan prisa o menos conocimientos quizá encuentren [Cha16] más asequible.

2. Buscando el caso fácil

En multitud de problemas de física y matemáticas se comienza reduciendo el número de dimensiones en busca del caso fácil, bien porque nos da luz acerca del caso general o bien porque no sabemos hacer otra cosa.

En cinemática o dinámica se estudian a menudo movimientos rectilíneos pero las ecuaciones de Maxwell (1.1) parecen demasiado vectoriales como para reducir todo a una sola dimensión, si imponemos $\vec{E} = \big(E(x,t), 0, 0\big)$, $\vec{B} = \big(B(x,t), 0, 0\big)$ la única posibilidad es que E y B sean funciones constantes, que no haya electrodinámica. Empecinados en buscar el caso unidimensional y en creer que representa al caso general, examinemos dónde está el problema.

La ley de Gauss elimina la dependencia de E en x, lo cual es malo y sugiere que si elegimos la dirección x como variable no debemos usar la primera coordenada de $\vec{E}$. Con esta motivación escojamos $\vec{E} = \big(0, E(x,t), 0\big)$ que trivialmente satisface la primera ecuación de (1.1). Su rotacional tiene las dos primeras coordenadas nulas, así que la tercera ecuación dice que la coordenada buena para $\vec{B}$ es la tercera. Esto tiene buena pinta porque $\vec{B} = \big(0, 0, B(x,t)\big)$ cumple obviamente la segunda ecuación. En resumidas cuentas, las ecuaciones de Maxwell (1.1) se reducen a

$$(2.1) \qquad c\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad \text{y} \quad c\frac{\partial B}{\partial x} = -\frac{\partial E}{\partial t} \qquad \text{cuando} \quad \vec{E} = \big(0, E(x,t), 0\big), \quad \vec{B} = \big(0, 0, B(x,t)\big).$$

Se dice que las soluciones son *ondas planas* y merece la pena examinar un poco a qué viene tal nombre. Lo de “planas” es un nombre genérico cuando $\vec{E}$ y $\vec{B}$ estén contenidas en respectivos planos y aquí lo están, aunque también en líneas. Para ver las ondas, desacoplamos las ecuaciones derivando alternativamente con respecto de x y de t y usando que las derivadas parciales cruzadas coinciden. Con ello se obtiene

$$(2.2) \qquad c^2\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \qquad \text{y} \qquad c^2\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}.$$

Así tanto E como B resuelven la *ecuación de ondas*

$$(2.3) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

De acuerdo pero “ecuación de ondas” es solo un nombre, ¿dónde están las ondas? La respuesta rápida es que la solución más general de esta ecuación es

$$(2.4) \qquad u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct) \qquad \text{con } f \text{ y } g \text{ arbitrarias.}$$

La gráfica de $y = f(x-ct)$ para $t = 0$ es la de f, para $t = 1$ es la misma gráfica trasladada c unidades a la derecha, para $t = 2$ se traslada $2c$ unidades y así sucesivamente. De este modo $f(x-ct)$ representa algo que se mueve hacia la derecha con velocidad c. De la misma forma $g(x+ct)$ se mueve con velocidad c hacia la izquierda. Si suponemos que f y g solo tienen valores apreciables en un intervalo acotado, entonces cuadra con la idea intuitiva de onda como algo que se irradia en las direcciones del espacio.

Usando la solución (2.4) de (2.3) se deduce la solución de nuestra versión de bolsillo (2.1) de las ecuaciones de Maxwell

$$(2.5) \qquad E(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct) \qquad \text{y} \qquad B(x,t) = f(x-ct) - g(x+ct).$$

Aunque esta es la solución general salvo sumar constantes, no es la panacea porque a veces se imponen condiciones de contorno que limitan su utilidad. Por ejemplo, supongamos que utilizamos (2.3) para representar una cuerda vibrante con los extremos fijos, cierta elongación inicial $e(x)$ y con velocidad inicial nula. entonces buscaríamos soluciones solo definidas para $x \in [0,1]$ cumpliendo $u(0,t) = u(1,t) = 0$, $u(x,0) = e(x)$ y $\partial u(x,0)/\partial t = 0$. La solución (2.4) no nos da demasiada información en este problema.

3. Aquí hay algo raro

Es fácil saber si uno está girando muy deprisa porque se marea pero no es posible saber si uno viaja a velocidad constante muy grande. El Sistema Solar se mueve a más de $200km/s$ dentro de nuestra galaxia y nadie dice ni pío. Sentimos las aceleraciones, las cuales aparecen en los giros, pero no las velocidades. Con palabras grandilocuentes, las leyes de la física son las mismas para todos los *observadores inerciales*, para todos aquellos que se mueven con velocidad constante con respecto a uno designado como canónico, en reposo en el espacio absoluto, quiera decir lo que quiera decir eso.

De ello parece concluirse que en una dimensión las mediciones x y x' del espacio para dos observadores inerciales $\mathcal{O}$ y $\mathcal{O}'$ están relacionadas mediante $x' = x - vt$ donde v es la velocidad relativa de $\mathcal{O}'$ respecto de $\mathcal{O}$. Si uno se pone muy riguroso habría que añadir un x'_0 por si los espacios iniciales para $t = 0$ no coinciden pero nos despreocuparemos de ello suponiendo que las mediciones no son estrictamente de espacio y tiempo sino de sus incrementos o imponiendo que $\mathcal{O}$ y $\mathcal{O}'$ usen el mismo origen para $t = 0$. La demostración de $x' = x - vt$ parece tautológica: por definición de velocidad relativa, el origen de $\mathcal{O}'$ será vt para $\mathcal{O}$ y entonces $\mathcal{O}$ medirá el espacio que mide $\mathcal{O}'$ más vt.

Si $\mathcal{O}'$ escibiera sus ecuaciones de Maxwell utilizaría x' en lugar de x. Ahora bien, los campos eléctrico y magnético $\vec{E}'$ y $\vec{B}'$ medidos por $\mathcal{O}'$ no son los medidos por $\mathcal{O}$ cambiando x por x' (lo que forzaría la conservación de las ecuaciones de Maxwell) porque los campos eléctricos en movimiento dan lugar a campos magnéticos y viceversa, justo de esto hablan las ecuaciones de Maxwell.

Imaginemos que $\mathcal{O}$ y $\mathcal{O}'$ observan una misma onda electromagnética como las de antes y digamos que $\mathcal{O}$ la ve con $g = 0$ y f muy concentrada, de modo que puede asignar una posición bastante precisa a la onda, por ejemplo el punto del eje X donde el vector vertical $\vec{E}$ es mayor. El observador $\mathcal{O}$ diría que se mueve a velocidad c. Por su parte, el observador $\mathcal{O}'$ detectaría otros campos $\vec{E}'$ y $\vec{B}'$ que todavía no sabemos determinar. Sean cuales sean estos campos, $\mathcal{O}'$ verá una onda con velocidad c porque así lo asegura (2.1). Esto suena muy raro, porque $x' = x - vt$ conduce a $dx'/dt = dx/dt - v$ y ciertamente c no es $c - v$. No lo es pero casi, en términos relativos, porque las velocidades relativas v a las que estamos acostumbrados son mucho menores que c, entonces no es fácil comprobar en un laboratorio qué ocurre exactamente[1].

La salida más simple es suponer que $\mathcal{O}'$ debe usar unas ecuaciones de Maxwell distintas por el hecho de estar en movimiento. ¿Y qué pasa con lo de las mismas leyes para observadores inerciales? Antes de ponerse a gritar que no hay democracia y que ya no se respeta nada, pensemos en un ejemplo más asequible. Las ondas sonoras son ondas de presión en el aire que cumplen también una ecuación del tipo (2.3) pero cambiando c por una constante que es varios órdenes de magnitud más baja, No hay contradicción entre diferentes observadores inerciales si cada uno viaja con su propio aire. Implícitamente la ecuación de ondas del sonido involucra la velocidad del aire circundante pues son ondas de presión con respecto de él. Así para representar el sonido dentro de un avión debo cambiar primero al sistema de referencia en que el avión está en reposo y aplicar allí la ecuación.

[1]Por si quieres usarlo como argumento para recuperar las tasas de matrícula de carrera experimental: La relatividad propugna a partir de la relación entre $\mathcal{O}$ y $\mathcal{O}'$ un cambio de masa con la velocidad al menos para partículas cargadas. Tal cambio de masa compitió a principios del siglo XX con otra teoría previa ya olvidada de M. Abraham. Pues bien, los resultados experimentales apoyaban esta segunda teoría frente a la relatividad [Gol70]. Todo esto está relacionado con la fórmula más famosa de la Ciencia $E = mc^2$ y lo creas o no en algún momento, antes de Einstein, existía aplicada a electrones como $E = \frac{3}{4}mc^2$ [FLS64].

El problema es que no hay “aire” para las ondas electromagnéticas, viajan en forma de luz y calor desde el Sol hasta nosotros en un vacío bastante severo.

A finales del siglo XIX muchos físicos pensaban que había algún tipo de aire electromagnético, el éter, tan sutil que era muy difícil de detectar. Por otro lado, el *experimento de Michelson-Morley* de 1887 usaba la velocidad de la Tierra en su órbita $v \approx 30\ km/s$ y tenía precisión suficiente para detectar si $\mathcal{O}'$ medía c o $c-v$. Se decidía por la primera opción lo que sugería la inexistencia del éter. La posibilidad (inicialmente apoyada por Michelson) de que el éter fuera arrastrado por la Tierra no era muy creíble debido a observaciones astronómicas.

4. Preparando las transformaciones

Einstein dijo uno vez que no conocía el experimento de Michelson-Morley cuando creó la relatividad especial. Aunque esto es bastante dudoso [vD09], lo cierto es que preservar de alguna forma las ecuaciones de Maxwell era una prioridad para él y a la vez en su famoso artículo [Ein05] antepuso postular la constancia de la velocidad de la luz para deducir las transformaciones que dan el cambio entre observadores inerciales para después considerar la manera en la que dejan invariantes a las ecuaciones de Maxwell. Estos dos aspectos los reflejó dividiendo su artículo en una “parte cinemática” y en una “parte electromagnética”. Tras leer la próxima sección seguramente sospecharás la razón para el orden elegido por Einstein, la parte electromagnética requiere más fe, no es tan matemática como la cinemática.

Lo realmente revolucionario de la contribución de Einstein fue suponer que los cambios entre observadores inerciales con velocidad relativa no nula no dejan el tiempo invariante. Es decir, un intervalo de tiempo t para un observador inercial $\mathcal{O}$ puede transformarse en $t' \neq t$ para otro observador inercial $\mathcal{O}'$. Lorentz e incluso autores anteriores [Wik18] habían dado antes de Einstein con las transformaciones correctas pero ninguno (salvo quizá vagamente Poincaré) se había atrevido a creer que la fórmula para t' representaba tiempo físico real, no un artificio matemático.

Supongamos como antes que $\mathcal{O}'$ tiene velocidad v constante por el eje X con respecto a $\mathcal{O}$ y buscamos una transformación lineal $(x,t) \mapsto (x',t')$ que pase los intervalos de espacio y de tiempo medidos por $\mathcal{O}$ a los medidos por $\mathcal{O}'$. Esto es

$$x' = Ax + Bt, \qquad t' = Cx + Dt \tag{4.1}$$

para ciertas constantes A, B, C y D. Por supuesto, todo lo que no sea $C = 0$ y $D = 1$ choca con nuestra intuición. Metidos en hacer cosas raras uno podría preguntarse por qué no considerar algo más general del tipo $x' = f(x,t)$, $t' = g(x,t)$ sin que f y g sean lineales. Una posible respuesta es que la ley de inercia afirma que en ausencia de fuerzas todos los observadores inerciales deben observar trayectorias rectilíneas con velocidad constante y así $(x,t) \mapsto (x',t')$ debe pasar rectas a rectas y por tanto ser lineal en el sentido de Álgebra I y Álgebra II. Otra respuesta más abstracta pasa por decir que x y t son en realidad incrementos de espacio y de tiempo y eso sugiere que $f(x_2,t_2) - f(x_1,t_1)$ coincide con $f(x_1 - x_2, t_1 - t_2)$ y lo mismo con g.

Nuestro objetivo es determinar A, B, C y D, los elementos de la matriz de la aplicación lineal. El primer paso es usar la definición de velocidad relativa: el origen de $\mathcal{O}'$ tiene $x = vt$ para $\mathcal{O}$ y, por supuesto, $x' = 0$ para $\mathcal{O}'$, por tanto $B = -Av$. Por otro lado, $\mathcal{O}'$ ve el origen de $\mathcal{O}$ como $x' = -vt'$

y $\mathcal{O}$ como $x = 0$, lo cual implica $A \cdot 0 + Bt = -v(C \cdot 0 + Dt)$, es decir, $B = -vD$. Con esto logramos eliminar B y D para obtener

$$x' = Ax - Avt, \qquad t' = Cx + At. \tag{4.2}$$

Si $\mathcal{O}'$ sostuviera una varilla entre los puntos x'_1 y x'_2 mediría la longitud $x'_2 - x'_1$ mientras que para el observador $\mathcal{O}$ la longitud en un instante dado es $x_2 - x_1$ con $x'_2 - x'_1 = (Ax_2 - Avt) - (Ax_1 - Avt)$. Es decir, $x'_2 - x'_1 = A(x_2 - x_1)$ y A indica la relación entre las longitudes medidas por ambos observadores. Respetando una tradición física escribiremos a partir de ahora γ en lugar de A. La matriz de la transformación $(x, t) \mapsto (x', t')$ y la de su inversa son, según esta notación,

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v \\ C & \gamma \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v \\ C & \gamma \end{pmatrix}^{-1} = (\gamma + vC)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & v \\ -C/\gamma & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

Según lo dicho, $(\gamma + vC)^{-1}$ debe ser la razón entre la longitud medida por $\mathcal{O}$ para una varilla que sostiene en reposo en el eje X y la medida por $\mathcal{O}'$ en un instante dado t'. Es de esperar que el cambio de longitud sea relativo, es decir que la contracción o expansión de longitudes de $\mathcal{O}$ a $\mathcal{O}'$ sea la misma que la de $\mathcal{O}'$ a $\mathcal{O}$ porque la situación es simétrica. Esto implica $(\gamma + vC)^{-1} = \gamma$ y de ahí eliminamos C para obtener

$$x' = \gamma x - \gamma vt, \qquad t' = \frac{1 - \gamma^2}{\gamma v} x + \gamma t. \tag{4.4}$$

Recapitulando, con argumentos que darían tiritera a más de un matemático pero que son creíbles, hemos pasado de las transformaciones lineales generales (4.1) que dependían de cuatro parámetros a (4.4) que solo dependen de uno, de γ. Una muestra de que no hemos hecho nada demasiado escandaloso es que para $\gamma = 1$ obtenemos $x' = x - vt$, $t' = t$. Estas son las transformaciones que nos parecen intuitivas desde Galileo[2] y que en su honor se llaman *transformaciones de Galileo*.

5. Ajustando el parámetro

Recordemos que el parámetro γ que nos falta por conocer en (4.4) da la relación entre las longitudes medidas por los observadores. La segunda ecuación nos dice que también es la relación de tiempos para un evento que ocurre en un mismo punto, por ejemplo el origen de $\mathcal{O}$. No ya nuestra intuición sino los experimentos nos dicen que γ solo puede diferir de 1 infinitesimalmente en situaciones cotidianas o de laboratorio. Por otro lado, para $v = 0$ los dos observadores coinciden y la aplicación $(x, t) \mapsto (x', t')$ debe ser la identidad, lo que implica $\gamma = 1$. En definitiva, para no volver a las transformaciones de Galileo, lo único que puede ocurrir es que se tenga $\gamma = \gamma(v)$ con $\gamma(0) = 1$ y que γ solo cambie apreciablemente para velocidades muy grandes.

El argumento "cinemático" para calcular γ es simple. Si tomamos como base la constancia de la velocidad de la luz para todos los observadores inerciales, lo cual es consecuencia de combinar que

[2]Gracias a un famoso experimento mental que elaboró sobre la caída de objetos en un barco. Por otro lado, leyendo a Galileo parece que creía, con el lenguaje actual, que al menos en el ámbito de la mecánica celeste un observador inercial podía seguir trayectorias circulares aunque autores modernos defienden que esta no era su opinión [Dra64] [Boc16, §4.4].

la luz es una onda electromagnética[3] y que estas satisfacen la ecuación de ondas (2.3), entonces la recta $x = ct$ debe transformarse en $x' = ct'$ por (4.4) y se debe tener

$$\gamma ct - \gamma vt = c\Big(\frac{1-\gamma^2}{\gamma v}ct + \gamma t\Big). \tag{5.1}$$

Operando y despejando γ se deduce

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{5.2}$$

En rigor hay un $\pm$ pero el signo positivo es la única opción si queremos que esto sea una razón entre longitudes o duraciones. Para dar una idea de la magnitud de γ, las sondas espaciales más rápidas construidas no han conseguido velocidades respecto de nosotros para las que γ difiera de 1 en más de 10^{-7} y tales sondas no adquirieron temporalmente su enorme velocidad mediante propulsión artificial sino pasando cerca del Sol[4].

Veamos ahora el argumento "electromagnético" para deducir (5.2) apelando a cierta invariancia de las ecuaciones de Maxwell. Trabajaremos con la versión mini (2.1) y al final diremos qué queda en general.

La regla de la cadena y (4.4) aseguran

$$\gamma\frac{\partial E}{\partial x'} + \frac{1-\gamma^2}{\gamma v}\frac{\partial E}{\partial t'} = \frac{\gamma v}{c}\frac{\partial B}{\partial x'} - \frac{\gamma}{c}\frac{\partial B}{\partial t'} \qquad \text{y} \qquad \gamma\frac{\partial B}{\partial x'} + \frac{1-\gamma^2}{\gamma v}\frac{\partial B}{\partial t'} = \frac{\gamma v}{c}\frac{\partial E}{\partial x'} - \frac{\gamma}{c}\frac{\partial E}{\partial t'}. \tag{5.3}$$

Aquí se tiene el abuso de notación típico de la regla de la cadena, por ejemplo $\partial E/\partial x'$ significa que expresamos $E = E(x,t)$ en términos de x' y t' y después derivamos. El E y el B cambiados de variable no son en general el campo eléctrico E' y el campo magnético B' medidos por $\mathcal{O}'$ porque, como se ha mencionado antes, parte de E se transforma en B y viceversa. Todo lo que sabemos es que si queremos salvar las ecuaciones de Maxwell, (2.1) debe cumplirse añadiendo primas a x, t, E y B. Con este fin, agrupamos en las expresiones tan liosas que hemos conseguido antes todo lo que tenga $\partial x'$ y todo lo que tenga $\partial t'$, lo que permite escribirlas como

$$\frac{\partial}{\partial x'}\Big(\gamma E - \frac{\gamma v}{c}B\Big) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'}\Big(\gamma B + \frac{1-\gamma^2}{\gamma v}cE\Big), \qquad \frac{\partial}{\partial x'}\Big(\gamma B - \frac{\gamma v}{c}E\Big) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'}\Big(\gamma E + \frac{1-\gamma^2}{\gamma v}cB\Big). \tag{5.4}$$

Estas serían las ecuaciones de Maxwell para el observador $\mathcal{O}'$ si se tuviera

$$E' = \gamma E - \frac{\gamma v}{c}B = \gamma E + \frac{1-\gamma^2}{\gamma v}cB \qquad \text{y} \qquad B' = \gamma B - \frac{\gamma v}{c}E = \gamma E + \frac{1-\gamma^2}{\gamma v}cB. \tag{5.5}$$

Las segundas igualdades en cada caso implican $-\gamma v/c = c(1-\gamma^2)/\gamma v$ que despejando lleva a (5.2).

[3]Esto lo aventuró el propio Maxwell por la similitud de las velocidades. A decir verdad, los datos de su época sobre la velocidad medida con experimentos directos y a través de la estimación de las constantes en (1.1) no tenía una coincidencia tan precisa.

[4]Se prevé que en unos años la sonda solar Parker consiga temporalmente un $\gamma - 1$ algo mayor que $2 \cdot 10^{-7}$.

Ciertamente esto no es una demostración con rigor matemático pues simplificando alguna constante al agrupar podríamos haber llegado a un resultado incoherente. Simplemente, guiados por una intuición física y matemática, hemos buscado algo que no lleve a una contradicción[5].

La flamante conclusión por cualquiera de los dos métodos es que los cambios de sistema de referencia inerciales cuando el número de dimensiones espaciales se reduce a uno está regida por las *transformaciones de Lorentz*

$$x' = \gamma(x - vt), \qquad t' = \gamma(t - vx/c^2) \qquad \text{con} \quad \gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}. \tag{5.6}$$

Además las segunda manera de verlo implica que el campo electromagnético cambia con (5.5). Utilizando las simetrías del sistema, esencialmente que todos los ejes son iguales, se llega con algún esfuerzo a la versión vectorial que nos dice cómo se transforman $\vec{E}$ y $\vec{B}$, concretamente:

$$\begin{cases} E_1' = E_1, & E_2' = \gamma E_2 - \dfrac{\gamma v}{c} B_3, \qquad E_3' = \gamma E_3 + \dfrac{\gamma v}{c} B_2, \\ B_1' = B_1, & B_2' = \gamma B_2 + \dfrac{\gamma v}{c} E_3, \qquad B_3' = \gamma B_3 - \dfrac{\gamma v}{c} E_2. \end{cases} \tag{5.7}$$

Es un ejercicio de cálculo vectorial [Cha01, §1.2] comprobar que realmente $\vec{E}'$ y $\vec{B}'$ dados por estas fórmulas satisfacen (1.1) cuando las relaciones entre las variables son (5.6), completadas con $y' = y$ y $z' = z$.

Por ejemplo, digamos que una carga tiene velocidad constante v constante con respecto a nosotros. Un observador $\mathcal{O}$ que la sostiene en las manos mide la intensidad de campo que proviene de la fuerza de Coulomb[6] $\vec{E} = q\vec{r}/\|\vec{r}\|^3$ y $\vec{B} = 0$. Nosotros seremos un observador $\mathcal{O}'$ que tiene velocidad relativa $-v$ de modo que, de acuerdo con la inversa de (5.6), su $\vec{r} = (x, y, z)$ será igual a $\vec{r}' = (\gamma(x' - vt'), y', z')$, con nuestras coordenadas. Una vez hecha esta sustitución obtenemos de (5.7) que la intensidad de campo eléctrico que medimos es

$$E_1' = \frac{qx}{\|\vec{r}\|^3} = \frac{q\gamma(x' - vt')}{\|\vec{r}'\|^3}, \qquad E_2' = \frac{\gamma q y}{\|\vec{r}\|^3} = \frac{\gamma q y'}{\|\vec{r}'\|^3}, \qquad E_3' = \frac{\gamma q z}{\|\vec{r}\|^3} = \frac{\gamma q z'}{\|\vec{r}'\|^3}. \tag{5.8}$$

Si somos egocéntricos y quitamos las primas de nuestro sistema de referencia, lo que habremos demostrado es que para una carga en movimiento no se cumple exactamente la ley de Coulomb sustituyendo x por $x - vt$, sino que su intensidad de campo es

$$\vec{E} = \frac{\gamma q(x - vt, y, z)}{\big(\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2\big)^{3/2}}. \tag{5.9}$$

Para las velocidades habituales, γ se acerca tanto a 1 que es prácticamente imposible notar la diferencia.

[5] En [Dun08] se mantiene que no solo las transformaciones de Lorentz se derivan de las ecuaciones de Maxwell de esta forma sino que también lo hacen de las ecuaciones de Newton. Cualquiera de las dos deducciones difícilmente sería calificada por un matemático como una demostración.

[6] Usando las unidades gaussianas empleadas en (1.1), no hace falta ninguna constante eléctrica.

6. El espacio-tiempo de Minkowski

Minkowski fue profesor de Einstein y quizá la genialidad de su alumno le haya quitado algún reconocimiento en la muchas veces sesgada historiografía científica. Einstein inicialmente fue renuente a considerar interesantes las ideas de Minkowski que le parecían una abstracción innecesaria. Así llegó a calificarlas de "erudición superflua" y es también de aquella época su frase "Desde que los matemáticos han invadido la teoría de la relatividad ni yo mismo la entiendo". Sus opiniones cambiarían rápido con la relatividad general, muy cercana a los intereses y métodos de los matemáticos [SR04], en cuyo desarrollo las ideas de Minkowski se volvieron básicas. Para ilustrar el contraste, apenas cuatro años tras su críticas Einstein decía "He adquirido una gran reverencia por las matemáticas cuyas partes más sutiles consideraba ingenuamente como un lujo".

A pesar de que el crédito póstumo que dio Einstein a Minkowski ha hecho que su nombre aparezca en la física actual, seguro que oirás mil veces en la divulgación e incluso a tus profesores que Einstein dijo que vivíamos en un espacio-tiempo de cuatro dimensiones o que la cuarta dimensión era el tiempo o que el tiempo es espacio imaginario, pues bien, más cerca de la realidad estaría afirmar que Einstein inicialmente se burló de aquellas cosas cuando Minkowski las dijo.

La contribución de Minkowski está bien representada por una conferencia titulada "Espacio y tiempo" impartida en 1908. No requiere grandes conocimientos y las explicaciones son bastante buenas e iluminadoras (si quieres salir corriendo a buscarla, la transcripción está por ejemplo en [LEMWed]). En dicha conferencia, Minkowski comienza observando que la mecánica de Newton manifiesta una invariancia en dos sentidos. Por decirlo gráficamente, las leyes de la física no cambian si giramos la cabeza ni tampoco si caminamos a ritmo constante en línea recta. Una vez fijado un origen de espacios y tiempos, en términos matemáticos esto se traduce en transformaciones lineales que dejan fijas las normas $x^2 + y^2 + z^2$ (esto son giros y simetrías) y transformaciones del tipo $(x, y, z) \mapsto (x - \alpha t, y - \beta t, z - \gamma t)$. Las primeras son geométricas y las segundas basadas en nuestra experiencia con observadores inerciales. Lo que Minkowski propone es construir la mecánica sobre la base de que las leyes sean invariantes por las transformaciones lineales que dejan invariante la forma cuadrática

$$Q(t, x, y, z) = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2. \tag{6.1}$$

De esta manera todas las transformaciones se vuelven geométricas, con una manera de medir rara. Minkowski nota que en el límite $c \to \infty$, lo cual no está lejos de nuestra experiencia porque c es muy grande, se recuperan los dos tipos de transformaciones antes mencionadas. De alguna forma Q las unifica ya que en ella espacio y tiempo aparecen intrínsecamente unidos. De hecho con el cambio artificial $T = cit$, donde $i = \sqrt{-1}$, se obtiene $-T^2 - x^2 - y^2 - z^2$ y todas las variables desempeñan un papel simétrico e incluso cambiando el signo y tomando la raíz cuadrada es algo tan simple como la manera habitual de medir en $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar usual. Minkowski llega incluso a mencionar como "fórmula mística" $3 \cdot 10^5\ km = \sqrt{-1}\ s$ que tiene su herencia en las menos místicas unidades relativistas, ampliamente usadas en la actualidad.

Desde la perspectiva de Álgebra II, escribiendo $x_0 = ct$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, se tiene que Q es la "norma" que deriva del "producto escalar"

$$x_0x_0' - x_1x_1' - x_2x_2' - x_3x_3' \tag{6.2}$$

que es como el usual con un pequeño lío de signos. No es un genuino producto escalar porque claramente no es definido positivo, sin embargo sí lo es en el *como de luz* $x_0^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) > 0$ que corresponde a los eventos que pueden tener una relación causal con el origen porque $c^2t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) < 0$ implicaría una velocidad mayor que la de la luz. En definitiva, en la parte físicamente accesible se comporta como un producto escalar. A veces se dice que es un *pseudo producto escalar*.

La idea de mezclar el espacio y el tiempo en un espacio-tiempo cuatridimensional llevó a Minkowski a considerar que las velocidades y aceleraciones protagonistas hasta entonces de la mecánica deberían sustituirse por vectores cuatridimensionales. Entre las ventajas que señaló están una simplificación en la comprensión de algunos fenómenos relativistas y la armonización de la mecánica y la electrodinámica.

No ahondaremos aquí en estos aspectos físicos, nos limitaremos a ver una deducción geométrica de las transformaciones de Lorentz. Si no te parece elegante, tienes que trabajar más tus gustos matemáticos.

Buscamos transformaciones que involucren x y t y que dejen invariante Q. Con el cambio antes indicado, es lo mismo que buscar las que dejan invariante la norma $T^2 + x^2$ y estos son los giros, pensando en términos reales (nos olvidamos de las simetrías que corresponden a cambios de orientación, como $x \mapsto -x$). La fórmula de un giro de ángulo α en $\mathbb{R}^2$ es sencilla y bien conocida:

$$\begin{pmatrix} T' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ x \end{pmatrix} \tag{6.3}$$

Volviendo a coordenadas reales mediante $T = cit$, $T' = cit'$ se sigue

$$t' = t\cos\alpha + ic^{-1}x\operatorname{sen}\alpha, \qquad x' = cit\operatorname{sen}\alpha + x\cos\alpha. \tag{6.4}$$

Por la definición de velocidad relativa, $x' = 0$ para $x = vt$ y por tanto $0 = ci\operatorname{sen}\alpha + v\cos\alpha$, es decir $\tan\alpha iv/c$. Usando las relaciones trigonométricas $\cos\alpha = (1 + \tan^2\alpha)^{-1} = \gamma$ y $ci\operatorname{sen}\alpha = -v\cos\alpha = -\gamma v$. recuperando (5.6).

De este modo, las transformaciones de Lorentz son una suerte de giro complejo y adquieren un significa geométrico equiparable a los giros que aplicamos a las coordenadas cuando ladeamos la cabeza. En términos más abstractos, lo que propugna Minkowski es que las transformaciones que sirven para cambiar entre observadores inerciales son las aplicaciones ortogonales para el (pseudo) producto escalar (6.2), los cambios de base que no afectan a esta forma bilineal.

7. Para saber más

La manera en la que Lorentz descubrió sus transformaciones está descrita en [FLS64, 21-6]. Fue un argumento electromagnético más avanzado que el usado aquí pero también más convincente, al menos en la forma de la referencia antes citada (el original incluido en [LEMWed] es menos claro). Einstein en [Ein05] dedujo las transformaciones de Lorentz a partir de la constancia de la velocidad de la luz empleando un experimento mental con espejos. Además de consultar el original o su traducción [LEMWed], se da una breve explicación en [Cha01, §1.2].

El texto [AnB16], a pesar de presentarse como un libro dedicado a un público amplio, contiene un tratamiento histórico muy detallado y completo acerca de las contribuciones de Einstein y de la física de su tiempo. No se limita a la relatividad especial.

Finalmente, dos libros bastante buenos y originales sobre electromagnetismo, ya mencionados antes, son [Gar15] y [FLS64].

Referencias

[AnB16] R. A. Alemañ Berenger. *El Paradigma Einstein.* Guadalmazán, 2016.

[Boc16] D. Boccaletti. *Galileo and the equations of motion.* Springer, Cham, 2016.

[Cha01] F. Chamizo. Seminario 2001: Una odisea en el espacio-tiempo. `http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/libreria/fich/APseminario02.pdf`, 2001.

[Cha16] F. Chamizo. Las ecuaciones de maxwell en plan fácil. `http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/physics/files/monop.pdf`, 2016.

[Dra64] S. Drake. Impetus theory and quanta of speed before and after Galileo. *Am. J. Phys.*, 32(8):601–608, 1964.

[Dun08] D. J. Dunstan. Derivation of special relativity from Maxwell and Newton. *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 366(1871):1861–1865, 2008.

[Ein05] A. Einstein. Zur Elektrodynamik bewegter Körper. *Annalen der Physik*, 17:891–921, 1905.

[FLS64] R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands. *The Feynman lectures on physics. Vol. 2: Mainly electromagnetism and matter.* Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass.-London, 1964.

[Gar15] T. A. Garrity. *Electricity and magnetism for mathematicians.* Cambridge University Press, New York, 2015. A guided path from Maxwell's equations to Yang-Mills.

[Gol70] S. Goldberg. The Abraham theory of the electron: The symbiosis of experiment and theory. *Arch. History Exact Sci.*, 7(1):7–25, 1970.

[LEMWed] H. A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski, and H. Weyl. *The principle of relativity.* A collection of original memoirs on the special and general theory of relativity. Dover Publications, Inc., New York, N. Y., undated. With notes by A. Sommerfeld, Translated by W. Perrett and G. B. Jeffery.

[Max54] J. C. Maxwell. *A treatise on electricity and magnetism.* Dover Publications Inc., New York, 1954. 3d ed, Two volumes bound as one.

[SR04] J. M. Sánchez Ron. Einstein, la relatividad y las matemáticas. *Gac. R. Soc. Mat. Esp.*, 7(1):153–184, 2004.

[vD09] J. van Dongen. On the role of the Michelson-Morley experiment: Einstein in Chicago. *Arch. Hist. Exact Sci.*, 63(6):655–663, 2009.

[Wik18] Wikipedia contributors. History of lorentz transformations — Wikipedia, the free encyclopedia, 2018. [Online; accessed 8-November-2018].