Movimientos y aplicaciones ortogonales y unitarias

Fernando Chamizo

3 de mayo de 2019

1. Diagonalización de aplicaciones ortogonales y unitarias

En lo sucesivo suponemos $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$ con el producto escalar usual.

Una matriz unitaria verifica $\overline{U}^t U = U\overline{U}^t = I$ y por tanto corresponde a un endomorfismo de $\mathbb{C}^n$ que es normal. El teorema espectral implica que existe una base ortonormal en la que se diagonalizaba. Es decir, existe C unitaria y D diagonal tal que $U = C^{-1}DC$. Entonces

$$D\overline{D}^t = CUC^{-1}\big(\overline{C}\,\overline{U}\,\overline{C}^{-1}\big)^t = CUC^{-1}\big((C^{-1})^t(U^{-1})^t C^t\big)^t = I \tag{1}$$

donde en la segunda igualdad se ha usado que también C es unitaria y por tanto $C\overline{C}^t = I$.

La conclusión es que las matrices unitarias tienen todos sus autovalores de módulo uno. Está claro que por lo demás pueden ser arbitrarios porque cualquier matriz diagonal con elementos de módulos uno es unitaria.

Ejemplo. El conjunto (grupo) de matrices unitarias 2×2 con determinante uno se denota con $\mathrm{SU}(2)$ y es muy relevante en física. La condición del determinante implica que sus autovalores siempre se pueden escribir de la forma $\lambda_1 = e^{i\alpha}$, $\lambda_2 = e^{-i\alpha}$ con $\alpha \in [0, 2\pi)$.

Una matriz ortogonal es como una matriz unitaria real y entonces lo anterior también se aplica. La diferencia es que si estamos considerando la aplicación en $\mathbb{R}^n$ los autovalores no pertenecerán a $\mathbb{R}$, excepto cuando $\lambda \in \{1, -1\}$. Por otro lado, los autovalores complejos deben aparecer por parejas conjugadas $e^{i\alpha}$, $e^{-i\alpha}$ ya que el polinomio característico es real. Gracias a lo que sabemos de la forma canónica de Jordan real siempre será posible encontrar una base en la que su matriz es diagonal por bloques del tipo

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad A_j = 1, \quad A_j = -1 \quad \text{o} \quad A_j = \begin{pmatrix} \cos\alpha_j & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha_j & \cos\alpha_j \end{pmatrix}. \tag{2}$$

No es difícil ver que además se puede escoger la base ortonormal. Para justificar ese punto, los autovectores de cada bloque, que son complejos en el caso 2×2, se pueden escoger ortonormales al resto, simplemente porque una matriz ortogonal es unitaria al considerarla en $\mathbb{C}^n$ y se aplica lo anterior. Además lo autovectores conjugados $\vec{v}$, $\overline{\vec{v}}$ correspondientes a cada par de autovalores conjugados no reales también pueden tomarse ortonormales por la misma razón. Pero si $\vec{v}$ y $\overline{\vec{v}}$ son ortonormales en $\mathbb{C}^n$ entonces $\vec{a} = \sqrt{2}\Re\vec{v}$ y $\vec{b} = \sqrt{2}\Im\vec{v}$ son ortonormales en $\mathbb{R}^n$ (esto se sigue escribiendo $\langle \vec{v}, \overline{\vec{v}} \rangle = 0$ y $\|\vec{v}\|^2 = 1$ en términos de $\vec{a}$ y $\vec{b}$) y son justamente estos vectores, salvo un factor de escala los utilizados para construir la forma de Jordan real.

En definitiva, las matrices ortogonales son exactamente aquellas que en cierta base ortonormal adquieren la forma (2).

2. Geometría de las aplicaciones ortogonales en el plano y en el espacio

Sabíamos que las aplicaciones ortogonales preservaban el producto escalar en un espacio vectorial euclídeo. Es decir, son transformaciones que fijan el cero y que preservan las distancias en el sentido de que

$$\|\vec{x} - \vec{y}\| = \|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\| \qquad \text{con} \quad f(\vec{0}) = \vec{0}. \tag{3}$$

Todavía más, se puede demostrar que cualquier biyección que satisfaga (3) es necesariamente lineal y por tanto una aplicación ortogonal. Una prueba de este hecho pasa por escribir el cuadrado de la primera ecuación de (3) como

$$\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - 2\vec{x} \cdot \vec{y} = \|f(\vec{x})\|^2 + \|f(\vec{y})\|^2 - 2f(\vec{x}) \cdot f(\vec{y}) \tag{4}$$

que restada de ella misma alternativamente con $\vec{x} = \vec{0}$ y $\vec{y} = \vec{0}$, conduce a $f(\vec{x}) \cdot f(\vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y}$. Entonces desarrollando $\|f(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) - \lambda f(\vec{x}) - \mu f(\vec{y})\|^2$ con productos escalares y quitando la f se tiene que esta norma es nula y por tanto la función lineal.

En un contexto geométrico general se llaman *isometrías* a las transformaciones invertibles que preservan la manera de medir y lo que hemos visto es que en los espacios vectoriales euclídeos las aplicaciones ortogonales son justamente las isometrías que fijan el origen.

Si ahora nos centramos en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ (con la base canónica y el producto escalar usual). Las matrices ortogonales equivalen a las isometrías que fijan el origen y son transformaciones que podemos "ver" y tienen relevancia física pues tenemos la idea intuitiva de que las leyes de la naturaleza deben ser invariantes por todo lo que no modifique ángulos y distancias (esto es cierto en la mecánica pero no exactamente en temas más avanzados). Nuestro objetivo es clasificar todas las posibilidades para matrices ortogonales de acuerdo a cómo pueden ser sus formas canónicas reales en una base ortonormal e interpretar geométricamente su significado.

En $\mathbb{R}^2$ hay dos posibilidades:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \to \text{simetría} \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \to \text{giro.} \tag{5}$$

En principio *simetría* y *giro* son solo nombres pero concuerdan con nuestra intuición. Veámoslo con más detalle analizando sus llamados *elementos geométricos*. En el primer caso la recta $t\vec{v}$ con $\vec{v}$ el autovector que corresponde a $\lambda = 1$ queda fijo, este es el *eje* de la simetría. Mientras que el otro autovector, necesariamente ortogonal, cambia de sentido, por tanto se comporta como un espejo. En el segundo caso vemos que aplica los vectores de la base canónica, que son $(\cos\beta, \operatorname{sen}\alpha)^t$ con $\beta = 0, \pi/2$ en $\big(\cos(\alpha+\beta), \operatorname{sen}(\alpha+\beta)\big)^t$. Entonces verdaderamente gira con un ángulo α. En cualquier base la matriz de un giro es como la indicada en (5) así pues el ángulo se reconoce por ejemplo como $\arccos a_{11}$ con el signo que corresponda a a_{21}. Una manera rápida de distinguir los dos casos es que el primero tiene determinante -1 y el segundo 1.

Ejemplo. Estudiemos qué tipo de isometrías representan las siguientes matrices ortogonales y sus elementos geométricos:

$$A_1 = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 & -12 \\ -12 & -5 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 & 12 \\ -12 & 5 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Solo la primera tiene determinante -1 entonces representa una simetría mientras que las otras representan giros. Resolviendo $(A_1 - I)\vec{x} = \vec{0}$ el eje de la simetría es la recta con vector director $(3, -2)^t$, esto es $2x + 3y = 0$. El giro que corresponde a A_2 tiene ángulo $\alpha = \pi/2$ y el ángulo que corresponde a A_3 cumple $\cos\alpha = 5/13$, $\operatorname{sen}\alpha = -12/13$ que se puede escribir como $-\arccos(5/13)$ o $\operatorname{arcsen}(-12/13)$ con las determinaciones habituales de estas funciones y no da un valor exacto, es aproximadamente $-1.17\,\mathrm{rad}$.

En $\mathbb{R}^3$ algebraicamente también hay dos posibles diagonalizaciones (en base ortonormal) que dan todas las posibilidad pero geométricamente es conveniente reservar los nombres indicados solo para $\operatorname{sen}\alpha \neq 0$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \to \text{giro}, \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \to \begin{array}{l} \text{giro compuesto} \\ \text{con simetría.} \end{array} \tag{7}$$

Los elementos geométricos en el primer caso son el eje de giro que se calcula con el autovector correspondiente a $\lambda = 1$. Un truco muy conveniente para hallar el ángulo es recordar que la traza es invariante por cambios de base, así pues incluso sin estar en la forma diagonal la traza será $1 + 2\cos\alpha$. Esto determina el ángulo salvo el signo pero es todo lo que se puede hacer geométricamente porque el sentido de un giro en $\mathbb{R}^3$ depende del lado del eje desde el que lo observemos, así siempre podemos imponer $0 \le \alpha \le \pi$. En física en diversas situaciones hay que especificar un sentido de giro coherente con la dirección de cierto vector (*regla del sacacorchos*) pero matemáticamente el eje de un giro es una recta y no tiene un vector director privilegiado.

En el segundo caso, el plano de simetría es el que tiene como vector normal el autovector correspondiente a $\lambda = -1$, que a su vez es el eje del giro, y el ángulo se determina usando que la traza es $-1 + 2\cos\alpha$. De nuevo el signo de α es matemáticamente arbitrario y siempre podemos tomar $0 \le \alpha \le \pi$ que está determinado por el valor del coseno. El giro y la simetría conmutan como muestra la estructura por bloques en (7).

Los casos $\operatorname{sen}\alpha = 0$, excluyendo la identidad, reciben nombre especiales de "simetrías" (aunque a veces se reserva este nombre a las que tienen determinante -1 y por tanto la primera no lo sería, realmente es un giro de ángulo π). Las matrices diagonales son:

(8)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{array}{l}\text{simetría}\\ \text{axial}\end{array} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{array}{l}\text{simetría por}\\ \text{un plano}\end{array} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{array}{l}\text{simetría}\\ \text{central}\end{array}$$

El último caso es igual en todas las bases y por tanto no hay nada que calcular. En los otros dos casos el eje y el plano de simetría se hayan como antes pues corresponden a (7) con $\alpha = \pi$ y $\alpha = 0$, respectivamente.

Ejemplo. Estudiemos qué tipo de isometrías representan las siguientes matrices ortogonales y sus elementos geométricos:

(9)
$$A_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Solo A_2 tiene determinante 1 así que es la única que da lugar a un giro (o una simetría axial si $\alpha = \pi$). La traza es $2/3$ y $2/3 = 1 + \cos\alpha$ y por tanto el ángulo de giro α es aproximadamente 1.91 rad. El eje es corresponde al núcleo de $A_2 - I$ que es la recta generada por $(1, 3, 1)^t$.

Como tanto A_1 como A_3 tienen determinante -1 deben cuadrar en el esquema de la segunda diagonalización en (7). Al tomar trazas para A_1 se sigue $\cos\alpha = 1$ así pues corresponde a una simetría pura (sin giro) por un plano, esto es, a la segunda posibilidad en (8). El núcleo de $A_1 + I$ está generado por $(1, -1, 2)^t$ por tanto es una simetría con respecto al plano $x - y + 2z = 0$.

Finalmente, para A_3 la traza es -2 lo que lleva a $\cos\alpha = -1/2$ y entonces es un giro compuesto con simetría donde el giro tiene ángulo $\alpha = 2\pi/3$. El eje del giro está generado por $(1, 1, 1)^t$ que está en el núcleo de $A_3 + I$ y es también normal al plano de simetría. Es decir, este último es $x + y + z = 0$.

3. Movimientos en el plano y espacio afín

Para completar el análisis geométrico, cabe preguntarse cuáles son todas las isometrías de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, es decir, la funciones que verifican (3) sin forzar a que fijen el origen. La situación es más sencilla de lo que parece si nos damos cuenta que una isometría $f(\vec{x})$ que no fija el origen se transforma en una que sí lo fija componiendo con $\vec{x} \mapsto \vec{x} - f(\vec{0})$. En definitiva, las isometrías generales en $\mathbb{R}^n$ son de la forma

(10)
$$f(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{b} \qquad \text{con } A \text{ ortogonal.}$$

Matemáticamente nos hemos salido en cierto modo del esquema de los espacios vectoriales porque las aplicaciones lineales entre ellos fijan el origen y f no lo hace. Se dice que f es una *aplicación afín* que va del *espacio afín* $\mathbb{R}^n$ en sí mismo. La terminología viene de que hay una teoría que asigna a los espacios vectoriales espacios afines que son similares salvo que permitimos que los sistemas de referencia no sean solo bases compuestas por vectores sino que especifiquen un origen de coordenadas. A veces para distinguir el $\mathbb{R}^n$ vectorial del afín se denota al segundo con $A^n_{\mathbb{R}}$.

En este curso no nos hace falta insistir en la base teórica de los espacios afines pues lo único que vamos a hacer es permitir sumar vectores a isometrías lineales en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. En esta situación a las isometrías resultantes se les suelen llamar *movimientos* pues realmente corresponden al cambio que sufre el sistema de referencia fijado a un objeto rígido cuando lo movemos.

La clasificación de los movimientos lleva a considerar dos casos, dependiendo de si hay puntos fijos o no, lo cual se comprueba fácilmente resolviendo un sistema.

Si (10) tiene un punto fijo $f(\vec{c}) = \vec{c}$ entonces $f(\vec{x}) - \vec{c} = A(x - \vec{c})$ y clasificar el movimiento se reduce a estudiar la isometría correspondiente a A como en el apartado anterior y a trasladar los elementos geométricos por $\vec{c}$. Es decir, si un eje era $t\vec{v}$ ahora será $\vec{c} + t\vec{v}$ o si un plano era $ax + by + cz = 0$ ahora será $a(x - c_1) + b(y - c_2) + c(z - c_3) = 0$.

Si (10) no tiene puntos fijos entonces necesariamente $A - I$ debe ser singular para que el sistema sea incompatible o equivalentemente $\lambda = 1$ es autovalor. Si $\vec{b} = \vec{b}_1 + \vec{b}_1^{\perp}$ con $\vec{b}_1$ la proyección en el autoespacio existirá $\vec{c}$ con $A\vec{c} + \vec{b}_1^{\perp} = \vec{c}$ y tendremos los elementos geométricos de nuevo trasladados por $\vec{c}$ y además la traslación extra $\vec{b}_1$ a lo largo de lo que serían puntos fijos sin esta traslación. Con fórmulas, $f(x) - \vec{c} = A(\vec{x} - \vec{c}) + \vec{b}_1$. En $\mathbb{R}^3$ el caso de un giro (o de una simetría axial = giro de ángulo π), se dice que el resultado es un *movimiento helicoidal* y en el caso de una simetría por un plano en $\mathbb{R}^3$ o una recta en $\mathbb{R}^2$, se dice que el resultado es una *simetría deslizante*.

Ejemplo. Estudiemos los elementos geométricos de los movimientos de ecuaciones

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \vec{x} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \vec{x} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

En el primer caso el determinante es -1 y la traza es 1 (que correspondería a $\alpha = 0$), por tanto puede ser una simetría o una simetría deslizante. Para distinguir ambos casos tenemos que ver si hay puntos fijos. Estudiando el sistema vemos que es incompatible, por tanto es una simetría deslizante. Para ver sus elementos geométricos, calculamos el autoespacio de $\lambda = 1$, que debe ser ortogonal al de $\lambda = -1$ y ya habíamos visto en un ejemplo anterior que este estaba generado por $\vec{n} = (1, -1, 2)^t$. Por tanto con la notación anterior, $\vec{b}_1^{\perp} = (\vec{b} \cdot \vec{n})\vec{n}/\|\vec{n}\|^2 = \frac{2}{3}(1, -1, 2)^t$ y así se obtiene $\vec{b}_1 = \vec{b} - \vec{b}_1^{\perp} = (2, 0, -1)^t$. Una posible solución de $A\vec{x} + \vec{b}_1^{\perp} = \vec{x}$ es $\vec{c} = (1, 1, 1)$. Como sabemos que el plano de simetría tiene vector normal $\vec{n}$ y pasa por este punto concluimos que es $x - y + 2z = 2$. En definitiva, es una simetría deslizante consistente en una simetría por $x - y + 2z = 2$ seguida de la traslación que corresponde a sumar $(2, 0, -1)^t$.

La matriz del segundo movimiento ya habíamos visto en un ejemplo anterior que correspondía a un giro compuesto con una simetría. En particular es seguro que va a haber puntos fijos (porque $\lambda = 1$ no es autovalor y por tanto $A - I$ es invertible). Resolviendo el sistema se tiene $\vec{c} = (1, 1, 0)^t$ como punto fijo. Así el eje de giro $t(1, 1, 1)^t$ y el plano de simetría $x + y + z = 0$ pasan a ser ahora la recta $\vec{c} + t(1, 1, 1)^t$ y el plano $x + y + z = 2$. El ángulo, por supuesto, no varía con la traslación y sigue siendo $\alpha = 2\pi/3$.

Ejemplo. Estudiemos los elementos geométricos de los movimientos de ecuaciones

$$(12) \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ -4 & 1 & -8 \\ -4 & -8 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} - \frac{2}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

La matriz del primer movimiento tiene determinante 1 y la traza es $0 = 1 + 2\cos\alpha$ por tanto debe ser un giro o un movimiento helicoidal con $\alpha = 2\pi/3$. Estudiando el sistema, no tiene puntos fijos, por tanto necesariamente es movimiento helicoidal. Un autovector para $\lambda = 1$ es $\vec{v} = (1, 1, 1)^t$ y proyectando $\vec{b} = (2, 1, 0)^t$ sobre él obtenemos $\vec{b}_1 = \vec{v}$ y $\vec{b}_1^\perp = (1, 0, -1)^t$. Un cálculo prueba $A\vec{c} + \vec{b}_1^\perp = \vec{c}$ para $\vec{c} = (1, 0, 0)^t$. Se concluye que es un movimiento helicoidal con $\alpha = 2\pi/3$ cuyo eje de giro es $(1, 0, 0)^t + t(1, 1, 1)^t$ y con vector de traslación $(1, 1, 1)^t$.

El segundo movimiento tiene una matriz con determinante -1 y la traza es 1, lo que implica que los autovalores son -1 y 1 con multiplicidad dos, es decir, es una simetría o una simetría deslizante. Un autovector correspondiente a $\lambda = -1$ es $\vec{v} = (1, 2, 2)^t$ que será normal al plano de simetría. El sistema $A\vec{x} + \vec{b} = \vec{x}$ es compatible y una de las soluciones (puntos fijos) es $(1, 0, -1)^t$ así que es una simetría y el plano debe pasar por este punto, por tanto es $x + 2y + 2z = -1$.

4. Práctica de la construcción de movimientos

Uno también puede plantearse el problema inverso consistente en hallar la ecuación de un movimiento a partir de sus elementos geométricos. Tales elementos nos dan información acerca de la base ortonormal en la que se consigue la forma diagonal real (5), (7) o (8) y por tanto la ecuación se obtiene con un cambio de base. Este método no es muy rápido en general desde el punto de vista práctico.

Ejemplo. Para hallar el giro de ángulo $\pi/2$ alrededor del eje $t\vec{v}$ con $\vec{v} = (1, -1, 1)^t$ tenemos que completar una base ortonormal $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ con $\vec{u}_1 = \vec{v}/\|\vec{v}\|$. En realidad hay dos giros posibles, como se comenta después. Por ejemplo $\vec{u}_2 = \vec{w}/\|\vec{w}\|$ con $\vec{w} = (1, 1, 0)^t$ y $\vec{u}_3 = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2$. Haciendo los cálculos se tiene

$$(13) \qquad \vec{u}_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}(1, -1, 1)^t, \qquad \vec{u}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, 1, 0)^t, \qquad \vec{u}_3 = \frac{\sqrt{3}}{6}(-1, 1, 2)^t.$$

Si C es la matriz ortogonal formada cuyas columnas son estos vectores, entonces el movimiento es $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ donde

$$(14)\quad A = C\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\frac{\pi}{2} & -\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\\ 0 & \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2}\end{pmatrix}C^{-1} = C\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}C^t = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}-1 & -\sqrt{3}+1\\ \sqrt{3}-1 & 1 & -\sqrt{3}-1\\ \sqrt{3}+1 & \sqrt{3}-1 & 1\end{pmatrix}.$$

Utilizando el mismo argumento pero tomando $\vec{u}_1$ en sentido opuesto, habríamos obtenido un resultado diferente, correspondiente a cambiar $\sqrt{3}$ por $-\sqrt{3}$. Esto es lógico porque el ángulo de giro depende del lado del eje desde el que lo miremos, en ambos casos estamos hallando el giro del ángulo indicado consecuente con la regla del sacacorchos aplicada al vector elegido. Esta regla corresponde a que una vez especificado $\vec{u}_1$, para una elección de $\vec{u}_2$ siempre tomamos $\vec{u}_3 = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2$. De esta forma el cambio de base que lleva a (7) tiene determinante positivo.

Incorporar traslaciones no supone cambios significativos.

Ejemplo. Calculemos ahora a partir del ejemplo anterior la ecuación del movimiento helicoidal de ángulo $\pi/2$, eje $\vec{a} + t\vec{v}$ con $\vec{a} = (1,2,3)^t$, $\vec{v} = (1,-1,1)^t$ y traslación $\vec{t} = (2,-2,2)^t$. Para mover el eje de rotación del ejemplo anterior a $\vec{a}$ tendríamos que escribir $f(\vec{x}) - \vec{a} = A(\vec{x} - \vec{a})$ y al incorporar la traslación $\vec{t}$ se llega a que el movimiento buscado es $f(\vec{x}) = A\vec{x} - A\vec{a} + \vec{a} + \vec{t}$ con la matriz A como antes. Operando se obtiene $f(\vec{x}) = A\vec{x} + \frac{1}{3}(7 + 5\sqrt{3}, 2 + 2\sqrt{3}, 13 - 3\sqrt{3})^t$.

Con las simetrías se procedería igual tanto en el caso de dimensión 2 como 3 (aunque en $\mathbb{R}^3$ la ortogonalidad de los vectores en el plano de simetría no es necesaria).

Los cálculos se simplifican bastante usando dos fórmulas que son fáciles de justificar si se piensa en su significado geométrico (lo cual se deja para el estudiante interesado). La primera es la *transformación de Householder*

$$(15)\qquad \vec{x} \longmapsto \Big(I - \frac{2}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}\vec{v}^t\Big)\vec{x}$$

que da la simetría por el plano $\vec{v} \cdot \vec{x} = \vec{0}$. También sirve en $\mathbb{R}^2$ para simetrías por rectas.

Ejemplo. Para calcular la ecuación de la simetría con respecto al plano $3x+y-z = 3$, la transformación de Householder nos diría que la simetría por $3x + y - z = 0$ tiene como matriz

$$(16)\qquad A = I - \frac{2}{11}\begin{pmatrix}3\\ 1\\ -1\end{pmatrix}(3,1,-1) = \frac{1}{11}\begin{pmatrix}-7 & -6 & 6\\ -6 & 9 & 2\\ 6 & 2 & 9\end{pmatrix}.$$

El plano original es paralelo al empleado y pasa por $\vec{c} = (1,0,0)^t$. Trasladando a este punto la simetría buscada resulta $f(\vec{x}) = A(\vec{x} - \vec{c}) + \vec{c} = A\vec{x} + \frac{1}{11}(18, 6, -6)^t$.

La otra fórmula útil es la llamada *fórmula de giro de Rodrigues* que afirma que

$$(17)\qquad \vec{x} \mapsto \vec{x}\cos\alpha + (\vec{u} \times \vec{x})\operatorname{sen}\alpha + (\vec{u}\cdot\vec{x})(1 - \cos\alpha)\vec{u}$$

es el giro en $\mathbb{R}^3$ de ángulo α alrededor del vector unitario $\vec{u}$ (con el sentido dado por la regla del sacacorchos).

Ejemplo. Utilizando esta fórmula para el giro de ángulo $\pi/2$ alrededor de $\vec{v} = (1, -1, 1)^t$, que apareció en un ejemplo anterior, se sigue que es

$$\vec{x} \mapsto \vec{u} \times \vec{x} + (\vec{u} \cdot \vec{x})\vec{u} \qquad \text{con} \quad \vec{u} = \frac{\sqrt{3}}{3}\vec{v}. \tag{18}$$

Un cálculo sencillo muestra $\vec{v} \times \vec{x} = (-x_2 - x_3, x_1 - x_3, x_1 + x_2)^t$ y $\vec{v} \cdot \vec{x} = x_1 - x_2 + x_3$. Entonces el giro buscado es

$$\vec{x} \mapsto \frac{\sqrt{3}}{3}(-x_2 - x_3, x_1 - x_3, x_1 + x_2)^t + \frac{1}{3}(x_1 - x_2 + x_3)(1, -1, 1)^t \tag{19}$$

que escrito en forma matricial da el mismo resultado que antes con unos cálculos más simples.