Solución esquemática de los ejercicios 1) y 4)

---

a) Por ejemplo $\varphi(2I, I) = \text{traza}(3I) = 6$ que es distinto de $2\varphi(I, I) = 2\text{traza}(2I) = 8$. Entonces no es bilineal ni sesquilineal. Por ello no tiene sentido preguntarse si es simétrica o hermítica.

b) $\varphi(\lambda A_1 + \mu A_2, B) = \text{traza}(\lambda A_1 \overline{B} + \mu A_2 \overline{B}) = \text{traza}(\lambda A_1 \overline{B}) + \text{traza}(\mu A_2 \overline{B}) = \lambda\varphi(A_1, B) + \mu\varphi(A_2, B)$. Si nos creemos que $\text{traza}(A\overline{B}) = \overline{\text{traza}(B\overline{A})}$ entonces $\varphi(A, B) = \overline{\varphi(B, A)}$ y lo que hemos hecho en el primer argumento funciona en el segundo salvo conjugar y se concluye $\varphi(A, \lambda B_1 + \mu B_2) = \bar{\lambda}\varphi(A, B_1) + \bar{\mu}\varphi(A, B_2)$. De esta forma hemos probado que para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ es bilineal simétrica (porque conjugar en $\mathbb{R}$ es no hacer nada) y para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ es sesquilineal hermítica.

Falta justificar $\text{traza}(A\overline{B}) = \overline{\text{traza}(B\overline{A})}$. Una prueba rápida es hacer el cálculo $\text{traza}(A\overline{B}) = (a_{11}\bar{b}_{11} + a_{12}\bar{b}_{21}) + (a_{21}\bar{b}_{12} + a_{22}\bar{b}_{22})$ y notar que es invariante al intercambiar a_{ij} y b_{ij} y conjugar.

Nota: Una forma que es sesquilineal en $\mathbb{C}$ ya no puede ser bilineal en $\mathbb{C}$.

c) [Mejor poner $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{K})$ porque con el enunciado actual tomar conjugados no tiene ningún efecto]. Es fácil ver que $\varphi_2(A, B) = \text{traza}(A)\text{traza}(\overline{B})$ es bilineal simétrica cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y sesquilineal hermítica cuando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Del apartado anterior sabemos que $\varphi_1(A, B) = \text{traza}(A\overline{B})$ tiene estas mismas propiedades, por tanto lo mismo se aplica a $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$.

d) La derivada de una suma es la suma de las derivadas y lo mismo con la integral. Además en cada una de ellas se pueden sacar constantes. Con ello $\varphi(\lambda f_1 + \mu f_2, g) = \lambda\varphi(f_1, g) + \mu\varphi(f_2, g)$ y $\varphi(f, \lambda g_1 + \mu g_2) = \lambda\varphi(f, g_1) + \mu\varphi(f, g_2)$. No es simétrica, por ejemplo $\varphi(1, x) = 0$ pero $\varphi(x, 1) = 1$.

No tiene sentido preguntarse si φ es sesquilineal porque no tenemos un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$.

e) Igual que el apartado anterior salvo que ahora hay simetría porque $\varphi(f, g) = \varphi(g, f)$.

f) Igual que antes. No es simétrica, por ejemplo $\varphi(1, x) = -1/2$ pero $\varphi(x, 1) = 1/2$.

g) Se tiene $\varphi\big((2, 0), (1, 0)\big) = 9$ pero $2\varphi\big((1, 0), (1, 0)\big) = 8$ por tanto no es bilineal ni sesquilineal.
