ÁLGEBRA II

Hoja 5. Movimientos en el espacio afín euclídeo

1. Clasifica las siguientes aplicaciones ortogonales de $\mathbb{R}^2$ dando todos sus elementos geométricos.

a) $A = \begin{pmatrix} 1/3 & \sqrt{8}/3 \\ \sqrt{8}/3 & -1/3 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix}$

2. Considera en $\mathbb{R}^2$ las simetrías s_1 y s_2 respecto de las rectas generadas por los vectores $(1,0)$ y $(1,1)$, respectivamente.

a) Calcula el ángulo que forman las dos rectas anteriores.

b) Escribe las matrices de las composiciones $s_1 \circ s_2$ y $s_2 \circ s_1$.

c) Calcula sus ejes si fueran simetrías, o sus ángulos si fueran giros.

3. Considera en $\mathbb{R}^2$ las simetrías s_1 y s_2, cuyos ejes forman un ángulo β entre sí. Prueba que $s_1 \circ s_2$ y $s_2 \circ s_1$ son giros y calcula sus ángulos.

4. Considera en $\mathbb{R}^2$ la simetría s_1 cuyo eje está generado por el vector v y el giro r_1 de ángulo α. Prueba que $r_1 \circ s_1$ es una simetría. ¿Qué relación existe entre α y el ángulo que forma v con el eje de la nueva simetría?

5. Decide de manera razonada el resultado de componer dos giros en $\mathbb{R}^2$.

6. En el espacio de polinomios $\mathbb{P}_1[x] := \{a_0 + a_1 x : a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$ reales de grado menor o igual que 1, considera el producto escalar definido por

$$\varphi(p(x), q(x)) := \int_0^1 p(t)q(t)\mathrm{d}t.$$

a) Calcula la matriz en la base $\{1, x\}$ de la simetría cuyo eje es $L = \{p(x) \in \mathbb{P}_1[x] : p(1) = 0\}$.

b) Explica por qué esta matriz no cumple $AA^t = A^tA = I$.

7. Considera en $\mathbb{R}^2$ una simetría f que verifique $f(2,1) = (1,2)$. ¿Cuántas simetrías existen verificando esta condición? ¿Y cuántas aplicaciones ortogonales?

8. ¿En qué condiciones es una aplicación ortogonal en el plano autoadjunta?

9. Clasifica las siguientes aplicaciones ortogonales de $\mathbb{R}^3$ dando todos sus elementos geométricos.

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

d) $A = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & -6 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

10. Escribe la matriz de la simetría axial de $\mathbb{R}^3$ respecto a la recta generada por el vector $(1, 1, 1)$.

11. Explica por qué se cumple la *fórmula de giro de Rodrigues* que afirma que el giro en $\mathbb{R}^3$ de ángulo α alrededor del vector unitario $\vec{u}$ viene dado por $\vec{x} \mapsto \vec{x}\cos\alpha + (\vec{u}\times\vec{x})\operatorname{sen}\alpha + (\vec{u}\cdot\vec{x})(1-\cos\alpha)\vec{u}$. Aquí, como es habitual, $\vec{u}\times\vec{x}$ y $\vec{u}\cdot\vec{x}$ indican, respectivamente, los productos vectorial y escalar. Para apreciar la utilidad práctica de esta fórmula, calcula la matriz del giro de ángulo $\pi/3$ alrededor de $(1, 1, 1)$.

12. Calcula la ecuación de la simetría s con respecto al plano $x + y + z = 0$. Si $f = g \circ s$ cumple $f(2, 1, 0) = (-1, 0, -2)$ con g un giro alrededor del vector $(1, 1, 1)$, ¿cuál es su ángulo? Halla la matriz de f.

13. Encuentra la expresión analítica de las siguientes aplicaciones afines de $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$:

a) Giro de centro $(1, 1)$ y ángulo $\pi/2$;

b) Proyección ortogonal sobre la recta de ecuación $x + y = 1$;

c) Simetría respecto a la recta $x + y = 1$;

d) Composición del giro en el apartado (a) con la simetría del apartado (c) (es decir, primero se aplica el giro, y a continuación, la simetría).

e) La simetría deslizante de eje paralelo a la recta $2x + y = 3$ y que transforma $(2, 1)$ en $(1, 0)$.

f) El giro de ángulo $\pi/3$ que lleva $(2, 1)$ en $(1, 0)$.

14. Clasifica las siguientes isometrías del plano afín indicando sus elementos geométricos:

a) $\begin{cases} x' = -2 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{1}{2}y \end{cases}$

b) $\begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}y \\ y' = 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}y \end{cases}$

15. Encuentra la expresión analítica de las siguientes isometrías de $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$:

a) La simetría respecto al plano $3x - y + 2z = 1$;

b) El movimiento helicoidal respecto al eje $(0, 0, 0) + \langle(1, -1, 0)\rangle$ con ángulo π y vector de traslación $(2, -2, 0)$.

16. Clasifica los siguientes movimientos del espacio afín (no es necesario comprobar que lo son) indicando en cada caso sus elementos geométricos:

a) $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix};$

b) $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$

c) $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix};$

d) $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & -6 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix};$

e) $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & -4 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & 8 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$

f) $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$