1) Estudiar la gravitación causada por una masa irregular sin simetría esférica es complicado. El *desarrollo multipolar* permite obtener una aproximación del potencial $V(\vec{x}_0) = -G\int \rho(\vec{x})\|\vec{x}_0-\vec{x}\|^{-1}\,d^3\vec{x}$ con $\rho(\vec{x})$ la densidad suponiendo que esta es no nula solo en puntos con $\|\vec{x}\|$ mucho menor que $\|\vec{x}_0\|$. Es decir, aproxima el potencial a grandes distancias de la masa.

I) Muestra que $\|\vec{x}_0-\vec{x}\|^{-1} = r_0^{-1}\big(1-2r_0^{-2}\vec{x}_0\cdot\vec{x}+r_0^{-2}\|\vec{x}\|^2\big)^{-1/2}$ con $r_0=\|\vec{x}_0\|$ y $\vec{x}_0\cdot\vec{x}$ el producto escalar de $\mathbb{R}^3$.

II) Prueba que el polinomio de Taylor de orden 2 de $\|\vec{x}_0-\vec{x}\|^{-1}$ alrededor del origen es $r_0^{-1}+L(\vec{x})+Q(\vec{x})$ donde L es la aplicación lineal $L(\vec{x}) = r_0^{-3}\vec{x}_0\cdot\vec{x}$ y Q es la forma cuadrática $Q(\vec{x}) = \frac{1}{2}r_0^{-3}\big(3r_0^{-2}(\vec{x}_0\cdot\vec{x})^2-\|\vec{x}\|^2\big)$. Indicación: Posiblemente lo más rápido es pensar en el polinomio de una variable para $(1+x)^{-1/2}$.

III) Definiendo el *momento dipolar* $\mathcal{D}(\vec{x}_0) = -G\int \rho(\vec{x})L(\vec{x})\,d^3\vec{x}$ y el *momento cuadrupolar* $\mathcal{D}(\vec{x}_0) = -G\int \rho(\vec{x})Q(\vec{x})\,d^3\vec{x}$, explica por qué $V(\vec{x}_0)$ está aproximado por $-GMr_0^{-1}+\mathcal{D}(\vec{x}_0)+\mathcal{Q}(\vec{x}_0)$ con un error menor que Cr_0^{-4} con C una constante que depende de la densidad.

*IV) Prueba que la forma cuadrática Q es indefinida para cualquier $\vec{x}_0\neq 0$. Indicación: El reto es hacerlo sin cuentas. ¿Cuál es el coeficiente de λ^2 en el polinomio característico?

Comentarios: Cuando en el siglo XIX se observó que el perihelio de Mercurio se movía más allá de lo que se deducía de la influencia de otros planetas, hubo quien sugirió que podía deberse a un momento cuadrupolar no nulo por una falta de esfericidad del Sol. La relatividad general dio una explicación bien distinta y precisa. En los años 60 del siglo XX se abrió una polémica que permaneció durante años porque una teoría alternativa que incorporaba el achatamiento del Sol, despreciado en el cálculo con la relatividad general, parecía tener mayor apoyo experimental. El consenso actual es que esos experimentos sobreestimaron lo achatado que está el Sol y por tanto la influencia del momento cuadrupolar.

2) El tensor de inercia tiene una matriz simétrica A y se le asociaremos las formas cuadráticas $\mathcal{E}(\vec{x}) = \vec{x}^tA\vec{x}$ y $\mathcal{L}(\vec{x}) = \vec{x}^tA^2\vec{x}$. La primera está relacionada con la energía y la segunda con el módulo del momento angular. Por consideraciones físicas, ambas son definidas positivas.

I) Explica por qué existe una base ortonormal $\mathcal{B}=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ en la que $\mathcal{E}(\vec{x}) = I_1x^2+I_2y^2+I_3z^2$ y $\mathcal{L}(\vec{x}) = I_1^2x^2+I_2^2y^2+I_3^2z^2$. Explica también por qué siempre puede imponerse que el determinante de la matriz que forman sea 1. A estos vectores se les llama *ejes principales de inercia* y la condición del determinante asegura que se obtiene con un giro de la base canónica usual.

II) La mecánica de la rotación implica que en ausencia de fuerzas externas un sólido rígido gira de acuerdo con la ecuación $A\frac{d}{dt}\vec{\omega}+\vec{\omega}\times(A\vec{\omega}) = \vec{0}$ donde $\vec{\omega}=\vec{\omega}(t)$ es el vector velocidad angular. Prueba que en la base $\mathcal{B}$ estas ecuaciones se reducen a $I_i\frac{d}{dt}\vec{\omega}_i = (I_j-I_k)\omega_j\omega_k$ con i,j,k

Las hojas opcionales tratan de mostrar la aplicación de la asignatura en diferentes temas de física. Son una propuesta de F. Chamizo. Si durante el curso 2018–2019 tienes alguna duda que no te resuelven en la clase de problemas, consulta con él. Los apartados con asterisco son más difíciles.

una permutación cíclica de $1,2,3$. Es decir $ijk \in \{123, 231, 312\}$. Indicación: Puedes dar por supuesto que $U(\vec{v}\times\vec{w}) = U\vec{v}\times U\vec{w}$ si U es la matriz de un giro, lo cual es geométricamente claro.

III) A partir de estas ecuaciones, prueba que la rotación se realiza de modo que el vector $\vec{\omega}(t)$ describe una curva (llamada en física *polhode*) incluida en la intersección de los elipsoides $\mathcal{E}(\vec{x}) = C_1$ y $\mathcal{L}(\vec{x}) = C_2$ con C_1 y C_2 constantes.

IV) Suponiendo que los I_j son distintos, explica por qué los ejes principales son los únicos alrededor de los cuales puede girar el sólido rígido con velocidad angular constante. Comprueba que $I_j\mathcal{E} - \mathcal{L}$ es indefinida exactamente para un j y semidefinida (positiva o negativa) para los otros dos y deduce que solo para dicho j la intersección de elipsoides con $\mathcal{E}(\vec{x}) = \mathcal{E}(\vec{v}_j)$ y $\mathcal{L}(\vec{x}) = \mathcal{L}(\vec{v}_j)$ tiene soluciones distintas de $\pm\vec{v}_j$. Indicación: Recuerda que por ejemplo el vector $\vec{v}_1$ tiene trivialmente coordenadas $(1,0,0)$ en la base $\mathcal{B}$.

Comentarios: El último apartado implica el hecho nada intuitivo de que en un sólido rígido genérico, hay dos ejes principales por los que el sólido rígido gira establemente y mientras que por el tercero tendrá un comportamiento inestable ante cualquier perturbación. Un experimento casero girando en el aire un objeto con forma de caja o ladrillo, permite comprobar que el eje perpendicular a la cara generada por la arista mayor y menor es inestable.

3) En este ejercicio vamos a ver un caso muy elemental de un curioso fenómeno de álgebra lineal que se descubrió antes en física que en matemática en la forma de *repulsión de los niveles*. Dadas A y B matrices simétricas consideramos la matriz variable $M(t) = (1-t)A + tB$ con $t \in [0,1]$ que deforma $A = M(0)$ en $B = M(1)$. Diremos que M *degenera* si para algún $t \in [0,1]$, $M(t)$ tiene un autovalor múltiple (con multiplicidad al menos 2). Excepto en el último apartado consideramos solo el caso de matrices 2×2.

I) Eligiendo A y B al azar entre las matrices diagonales con elementos en algún intervalo, calcula la probabilidad de que M degenere. Indicación: Intenta representar gráficamente los autovalores y su evolución.

II) Determina todas las matrices simétricas 2×2 con autovalores dobles.

III) Dada A, muestra que si M degenera entonces B es de la forma $\mu_1 I + \mu_2 A$ con $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ y deduce de ello que es prácticamente imposible que M degenere si elegimos A y B al azar entre todas las matrices simétricas.

*IV) Trata de dar una explicación aunque sea heurística de que en dimensión n alta es prácticamente imposible que M degenere si escogemos A y B al azar entre las matrices $n\times n$ simétricas reales mientras que es bastante probable que lo tenga si las escogemos entre las diagonales.

Comentarios: En física es toda una industria, recogida bajo el nombre genérico de *teoría de perturbaciones*, tratar de predecir cómo cambia un sistema físico bien conocido cuando se hacen pequeños cambios que no permiten tener soluciones sencillas. En una de la fórmulas más famosas, utilizada en varias aplicaciones de la física cuántica, aparece un término que muestra que hay cierta reacción a que dos niveles de energía (representados por autovalores) se acerquen. En 1929 von Neumann y Wigner dieron la solución del último apartado en un artículo titulado *"Sobre el comportamiento de los autovalores en procesos adiabáticos"*.

4) Si Q_p y Q_k son formas cuadráticas con matrices diagonales A_p y A_k tales que la diagonal de A_p es $\left(\frac{1}{2}m_1\omega_1^2, \frac{1}{2}m_2\omega_2^2\right)$ y la de A_k es $\left(\frac{1}{2}m_1, \frac{1}{2}m_2\right)$ entonces $Q_p(\vec{x})$ y $Q_k(\dot{\vec{x}})$ con $\vec{x} = \vec{x}(t) \in \mathbb{R}^2$ representan la energía potencial y cinética de dos osciladores armónicos desacoplados de masas m_1 y m_2 y frecuencias angulares ω_1 y ω_2. Estas frecuencias al cuadrado son las soluciones de $|A_p - \lambda A_k| = 0$, correspondientes a la diagonalización simultánea de Q_p y Q_k. Supondremos $\omega_1 > \omega_2$.

I) Supongamos que introducimos una pequeña perturbación en la forma cuadrática $Q_p(\vec{x})$ cambiándola por $Q_p(\vec{x}) + m_1m_2\epsilon x_1x_2$. Calcula las nuevas frecuencias angulares al cuadrado $\widetilde{\omega}_1^2$ y $\widetilde{\omega}_2^2$ comprobando que son $S \pm \sqrt{R^2 + m_1m_2\epsilon^2}$ con $S = (\omega_1^2 + \omega_2^2)/2$ y $R = (\omega_1^2 - \omega_2^2)/2$.

II) Demuestra que $\omega_1 - \omega_2 \le \widetilde{\omega}_1 - \widetilde{\omega}_2$, con lo cual el espaciamiento de las frecuencias se ha incrementado tras la perturbación.

III) Halla el límite de $\Delta\epsilon^{-2}$ cuando $\epsilon \to 0$ donde Δ es el incremento del espaciamiento de las frecuencias. Como este límite es finito, el incremento varía con el cuadrado de la perturbación. Indicación: Sustituir ϵ^2 por t con $t \to 0^+$ puede aclarar los cálculos.

Comentarios: Este problema ilustra una analogía en física clásica de la repulsión de los niveles de la física cuántica. La conclusión es que dos osciladores armónicos incrementan la separación de sus frecuencias si introducimos un leve acoplamiento entre ellos.

5) Gracias al teorema fundamental del álgebra todos los polinomios de $\mathbb{C}[x]$ se descomponen en factores lineales. Sin embargo no hay un análogo cuando el número de variables se incrementa, ni siquiera para grado dos. Desde el punto de vista del álgebra abstracta se consigue un éxito parcial inventando *números hipercomplejos*. Curiosamente el tema aparece también en física teórica en el intento de factorizar operadores diferenciales.

I) Se llama *forma lineal* a una aplicación lineal $\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$. Muestra que toda forma cuadrática $Q : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ es producto de dos formas lineales.

II) Explica por qué $x^2 + y^2 + z^2$ no es producto de formas lineales. Indicación: Tomar $z = 0$ o $y = 0$ limita las posibilidades para los coeficientes.

III) Los *cuaterniones de Hamilton* están generados sobre $\mathbb{R}$ por unos "números" $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ que formalmente satisfacen las propiedades $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1$, $\mathbf{i} = \mathbf{jk}$, $\mathbf{j} = \mathbf{ki}$, $\mathbf{k} = \mathbf{ij}$, $-\mathbf{i} = \mathbf{kj}$, $-\mathbf{j} = \mathbf{ik}$, $-\mathbf{k} = \mathbf{ji}$. Comprueba que $x^2 + y^2 + z^2 = (x - \mathbf{i}y - \mathbf{j}z)(x + \mathbf{i}y + \mathbf{j}z)$.

IV) Se llaman *matrices de Dirac* γ^α con $\alpha \in \{0, 1, 2, 3\}$ a las matrices 4×4

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I_2 & O \\ O & -I_2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \gamma^j = \begin{pmatrix} O & \sigma_j \\ -\sigma_j & O \end{pmatrix} \quad \text{con } \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

donde I_2 es la identidad 2×2 y $j \in \{1, 2, 3\}$. Si identificamos la matriz identidad 4×4 con el uno, muestra que estas matrices definen "números" que cumplen $\gamma^0\gamma^0 = 1$, $\gamma^j\gamma^j = -1$

y $\gamma^\mu\gamma^\nu = -\gamma^\nu\gamma^\mu$ en el resto de los casos. Indicación: Para no embarcarse en cuentas muy largas, conviene tener en mente que las σ_j cumplen $\sigma_j^2 = I_2$, $\sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3$, $\sigma_2\sigma_3 = i\sigma_1$ y $\sigma_3\sigma_1 = i\sigma_2$.

v) La ecuación de ondas tiene asociada una forma cuadrática (en matemáticas se dice que es su *símbolo*) dada por $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$, la cual tiene un papel importante en relatividad. Muestra que se factoriza como $\sum_{\mu=0}^{3} \gamma^\mu x_\mu \cdot \sum_{\nu=0}^{3} \gamma^\nu x_\nu$.

Comentarios: La intención de Hamilton, cuando el álgebra lineal no estaba desarrollada, era fundamentar la mecánica y otras partes de la física con los cuaterniones. Los remanentes de este empeño aparecen cuando escribimos **i**, **j** y **k** al calcular el producto vectorial o el rotacional. La genialidad de Dirac fue factorizar la ecuación de ondas (más propiamente la de Klein-Gordon) para deducir una versión relativista de la ecuación de Schrödinger. Entre sus consecuencias estuvieron obtener correcciones muy precisas de los niveles de energía del átomo de hidrógeno, dar una base teórica a la existencia del espín y predecir la existencia de antipartículas. Muy pocos habrían admitido años antes que tales abstracciones algebraicas pudieran salir de la matemática pura. En la actualidad los físicos teóricos trabajan con generalizaciones todavía más abstractas asociadas a formas cuadráticas llamadas *álgebras de Clifford.*