ÁLGEBRA II

Hoja 4. Formas cuadráticas.

1. Diagonaliza en una base ortonormal las siguientes formas cuadráticas:

a) $Q(x,y) = 2x^2 + 8xy + 2y^2$.

b) $Q(x,y,z) = xy + yz + zx$;

2. Dados $a,b,c \in \mathbb{R}^+$, ¿qué propiedad deben satisfacer para que la superficie

$$ax^2 + y^2 + bz^2 + cxz = 1$$

esté acotada? Indicación: Explica primero por qué la respuesta no depende de la base elegida para expresar las coordenadas.

3. Considera la forma cuadrática $Q_\beta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ cuya expresión en coordenadas respecto a la base estándar es:

$$Q_\beta(x,y,z) = \beta x^2 + \beta y^2 + (1-\beta)z^2 + 2xy.$$

Calcula el rango y los índices de inercia de Q_β para los distintos valores de $\beta \in \mathbb{R}$. El rango de una forma cuadrática es el el rango de cualquier matriz que la represente, o equivalentemente, el numero de autovalores distintos de 0, contados según su multiplicidad. Los índices de inercia son los números de autovalores positivos, negativos o 0, siempre contados según su multiplicidad.

4. Sean $a,b,c \in \mathbb{R}$ tres números reales distintos fijados, y sea V el espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de los polinomios reales de grado menor o igual que 2. Definimos la función

$$\begin{array}{rccl} f: & V & \to & \mathbb{R} \\ & p(x) & \mapsto & p(a)^2 + p(b)^2 + p(c)^2. \end{array}$$

a) Comprueba que $\varphi\big(p(x), q(x)\big) = p(a)q(a) + p(b)q(b) + p(c)q(c)$ es una forma bilineal simétrica y deduce que f es una forma cuadrática.

b) Escribe la matriz de f respecto a la base $\{1, x, x^2\}$;

c) Encuentra una base de V respecto a la cual la matriz de f sea diagonal. Indicación: Lo más sencillo es pensar en algunos polinomios que sean ortogonales con el producto escalar que define φ.

5. Sea $Q_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma cuadrática que respecto a la base estándar tiene como matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & -\alpha \\ \alpha & 1-\alpha & 0 \\ -\alpha & 0 & 1+\alpha \end{pmatrix}.$$

a) Halla la traza y el determinante de la matriz y comprueba que $\lambda = 1$ es autovalor.

b) A partir de estos resultados, halla los otros dos autovalores y decide de manera razonada para qué valores de α la forma cuadrática Q_α es definida positiva y semidefinida.

c) Encuentra una base ortogonal en la que Q_α diagonalice.

6. Diagonalizar simultáneamente las siguientes formas cuadráticas:

a) $Q_1(x,y) = x^2 + 26y^2 + 10xy, Q_2(x,y) = x^2 + 56y^2 + 16xy$.

b) $Q_1(x,y) = -4xy, Q_2(x,y) = 9x^2/2 + 2xy + 2y^2$.

c) $Q_1(x,y,z) = x^2 - 8xy - 4y^2 + 10xz + 4yz + 2z^2, Q_2(x,y,z) = 6x^2 + 8xy + 4y^2 - 2xz - 4yz + 2z^2, (\lambda = -1, 2, 3)$.

d) $Q_1(x,y,z) = -2x^2 - 4xy - 2y^2 + 2xz + 2yz - z^2, Q_2(x,y,z) = 4x^2 + 4xy + 2y^2 - 2xz - 2yz + z^2, (\lambda = -1, 0)$.

7. En cierto sistema mecánico la energía cinética es $E_k = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + 4\dot{y}^2)$ y la energía potencial viene dada por $E_p = (17x^2 + 82y^2 - 24xy)m$. Halla un cambio de coordenadas de forma que la energía total $E_k + E_p$ se exprese como la suma de las energías de dos osciladores armónicos de masa m desacoplados, esto es, como $H_1(x_1) + H_2(x_2)$ con $H_j(x_j) = \frac{1}{2}m\dot{x}_j^2 + \frac{1}{2}m\omega_j^2 x_j^2$. Calcula las frecuencias angulares de oscilación ω_1 y ω_2.

8. Decide razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Si la matriz de una forma cuadrática tiene algún a_{ii} negativo no puede ser definida positiva.

b) Si en el criterio de Sylvester todos los menores angulares son mayores o iguales que cero, la forma no es indefinida.

c) Si una forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ es indefinida, entonces cumple $Q(\vec{v}) = 0$ para algún $\vec{v} \neq 0$.

d) Si una forma cuadrática $Q : \mathbb{Q}^3 \longrightarrow \mathbb{Q}$ es indefinida, entonces cumple $Q(\vec{v}) = 0$ para algún $\vec{v} \neq 0$. Indicación: Considera $x^2 + y^2 - 3z^2$ y usa que el cuadrado de un entero es siempre un múltiplo de 4 o un múltiplo de 4 más uno.

9. Dadas $Q_1, Q_2 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, sin suponer que ninguna de las dos es definida positiva prueba que si diagonalizan simultáneamente en una base ortonormal entonces sus matrices A_1 y A_2 conmutan. Da un ejemplo no trivial de dos formas cuadráticas indefinidas que diagonalicen simultáneamente en una base ortonormal.

10. Estudia las matrices que conmutan con una matriz diagonal cuyos elementos diagonal son distintos y utiliza el resultado para probar un recíproco parcial del ejercicio anterior: si A_1 tiene autovalores distintos y conmuta con A_2 entonces Q_1 y Q_2 diagonalizan simultáneamente en una base ortonormal. Nota: Con técnicas similares se prueba el recíproco sin ninguna hipótesis.