ÁLGEBRA II

Hoja 3. La forma canónica de Jordan

1. Determina en cada caso una base de $\mathbb{R}^n$ (o de $\mathbb{C}^n$) en la que las matrices dadas a continuación diagonalicen:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix},\ C_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix},\ C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ C_4 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 \\ 3 & 7 & -15 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Para cada uno de ellos encuentra matrices de cambio de base P_i y matrices diagonales D_i de modo que $C_i = P_i D P_i^{-1}$.

2. Decide de manera razonada para qué valores de los parámetros son diagonalizables los endomorfismos de $\mathbb{R}^3$ que en la base estándar tienen como matriz:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ 3 & 5 & 3 \\ -3 & -3 & a \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

3. Diagonaliza en una base ortonormal el endomorfismo dado en la base canónica:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Comprueba que la siguiente matriz es diagonalizable

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$

y da la matriz diagonalizada y la matriz de cambio de base. ¿Es la matriz invertible? Si así fuera, calcula su inversa usando la matriz diagonalizada.

5. Dadas las matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5/2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

calcula:

a) A_k^{10} para $k = 1, 2$.

b) $\lim_{n\to\infty} A_k^n$ para $k = 1, 2$.

6. Sea $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ una base de $\mathbb{C}^3$ y sean $f, g : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ los endomorfismos con matrices:

$$\mathrm{M}_B(f) = [f]_{BB} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathrm{M}_B(g) = [g]_{BB} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Decide de manera razonada por qué ninguno de los dos endomorfismos es diagonalizable.

7. Sea V un espacio vectorial de dimensión n, sea $W \subset V$ un subespacio vectorial de V y sea $Z \subset V$ un complementario de W (i.e., $W \oplus Z = V$). De este modo, cada $u \in V$ se escribe de manera única como la suma de un vector en W y otro en Z, i.e., $u = w + z$ con $w \in W$ y $z \in Z$. Decimos que $f : V \to V$ es la *simetría respecto a* W *con dirección* Z si para cada vector $u \in V$ con $u = w + z$ como antes, $f(u) = w - z$. Observa que una simetría es, en particular, una aplicación lineal.

a) Demuestra que una simetría siempre es diagonalizable.

b) Si V es un espacio vectorial euclídeo (o unitario) demuestra que f es una aplicación ortogonal si y sólo si $Z = W^{\perp}$.

8. Decide de manera razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Si f es diagonalizable y biyectiva, entonces f^{-1} es diagonalizable.

b) Si f es diagonalizable entonces su adjunta, $\widetilde{f}$ es diagonalizable.

9. En un bosque maderero, los árboles están clasificados en dos tamaños. Un censo que se hace cada 5 años reclasifica un 30% de los árboles de tamaño menor, que pasan a ser de tamaño grande. Entre cada dos censos se corta un 10% de los árboles de tamaño grande y se repuebla con el mismo número de árboles de tamaño pequeño. ¿Aumenta el número de árboles con el tiempo? Si inicialmente había 1000 árboles de tamaño pequeño y ninguno grande, ¿cuántos árboles de tamaño grande hay a los 20 años? (**Sugerencia:** si x_n(resp. y_n) representa el número de árboles pequeños(resp. grandes) después de n períodos de 5 años, se tiene $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$ para una cierta matriz A que convendrá diagonalizar).

10. Supongamos que tenemos dos depósitos de igual volumen con agua comunicados por un doble conducto por el que circula el agua como sigue:

NaCl	$\longrightarrow$ $\longleftarrow$	NaCl

Inicialmente, en el primer depósito hay NaCl disuelto al 1 %, y en el segundo hay NaCl disuleto al 2%. Cada minuto pasa un 5% del volumen del primer depósito al segundo y viceversa. Decide de manera razonada la concentración de NaCl que habrá en cada uno de los depósitos después de 120 minutos. ¿Qué prevés que suceda a largo plazo?

11. Los *dusky-footed wood rats* son un tipo de roedor común en los bosques de California, cuyo depredador natural es el búho moteado. Denotamos por O_k la población de búhos después de k meses y por R_k la población de roedores después de k-meses. Supongamos que

$$\begin{aligned} O_{k+1} &= \ 0.5O_k + 0.4R_k \\ R_{k+1} &= \ -pO_k + 1.1R_k \end{aligned}$$

donce p es una constante positiva. El sumando $0.5O_k$ indica que si no hay roedores, la tasa de supervivencia de los búhos es del 50% al mes, mientras que el sumando $1.1R_k$ nos dice que en ausencia de búhos, los roedores crecerían a un ritmo del 10% al mes. El término $0.4R_k$ indica el crecimiento de los búhos en presencia de los roedores, y el término $-pO_k$ mide la desaparición de roedores debido a la caza por parte de los búhos.

a) Determina la evolución de las dos poblaciones a largo plazo si $p = 0.104$.

b) Determina la evolución de las dos poblaciones a largo plazo si $p = 0.2$. ¿Crece la población de búhos? ¿Y la de roedores?

c) Determina un valor de p para el que el número de individuos de ambas poblaciones se estabilice a largo plazo. ¿Cuál será entonces la proporción entre ambas poblaciones? Se puede probar que este *equilibrio* entre ambas poblaciones es inestable (cualquier cambio menor en alguno de los datos provoca decrecimento o crecimiento de ambas poblaciones a largo plazo).

12. Sea $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ un polinomio con coeficientes reales. Dada una matriz cuadrada $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ podemos evaluar $p(x)$ en A del siguiente modo:

$$p(A) := a_0I_n + a_1A + \ldots + a_nA^n.$$

Observa que $p(A)$ es de nuevo una matriz cuadrada, de modo que si A es la matriz de un endomorfismo de $\mathbb{R}^n$, entonces $p(A)$ es otra vez un endomorfismo de $\mathbb{R}^n$. Observa también que para todo par de polinomios $p(x), q(x)$, se tiene que $p(A)q(A) = q(A)p(A)$.
Una vez hemos definido polinomios de matrices cuadradas o de endomorfismos, las series de matrices se definen simplemente como el límite de polinomios de matrices de grado n, cuando n tiende a infinito. Una serie que se utiliza con frecuencia (entre otras cosas) para resolver ecuaciones diferenciales, es $e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$.

a) Demuestra que si D es diagonal, con entradas $d_1, \ldots, d_n$ en la diagonal principal (abreviación: $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$) entonces $e^D = \operatorname{diag}(e^{d_1}, \ldots, e^{d_n})$. Concluye que e^D es definida positiva, y en particular, inversible.

b) Demuestra que si $A = PDP^{-1}$, donde D es diagonal, entonces $e^A = Pe^DP^{-1}$.

c) Si $\mathbf{0}$ denota la matriz con todo ceros, entonces $e^0 = I$.

d) Halla e^N cuando N es nilpotente (recuerda que N es nilpotente si existe algún m tal que $N^m = 0$.

e) Demuestra que $A^me^A = e^AA^m$ para cualquier matriz A.

f) Demuestra que si P es una proyección, entonces $e^P = I + (e-1)P$.

g) Demuestra que si A y B conmutan, $e^Ae^B = e^{A+B}$.

h) Si A verifica $A^t = -A$, entonces demuestra que A es una matriz ortogonal.

13. Sea $\mathcal{S}$ el conjunto formado por todas las matrices de dimensión 3×3 que son diagonalizables y tienen todos los valores propios mayores que cero.

a) Estudiar si $\mathcal{S}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$.

b) Definimos

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Comprobar que $A \in \mathcal{S}$.

La función $\log : \mathcal{S} \to \mathbb{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$ cumple las siguientes propiedades:

i) Si $D = \operatorname{diag}(a, b, c)$, entonces $\log D = \operatorname{diag}(\log a, \log b, \log c)$.

ii) Si $M, N \in \mathcal{S}$ y $P \in \mathbb{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$ con P invertible y $M = P^{-1}NP$, entonces $\log M = P^{-1}(\log N)P$.

c) Calcula $\log A$.

d) Estudia si se verifica la relación $\log(MN) = \log M + \log N$ para $M, N \in \mathcal{S}$.

14. Comprueba que las siguientes matrices no son diagonalizables y halla su forma de Jordan y una base de Jordan para cada una de ellas:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad C_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad C_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad C_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

15. Hallar la forma de Jordan real de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

16. Consideramos las siguientes matrices con coeficientes reales:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 2 \\ -2 & -1 & -2 & -1 \\ -4 & -2 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 9 & 3 \\ -4 & 2 & 6 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_8 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad A_9 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Determina la forma canónica de Jordan J_i (sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ en el que el polinomio característico descomponga en factores lineales) de cada una de las matrices A_i y da en cada caso la base de Jordan.

b) En los casos en los que la forma de Jordan tenga coeficientes en $\mathbb{C}$, encuentra J_i^{real}, la forma canónica real de A_i, una base de $\mathbb{R}^4$ respecto a la cual el endomorfismo de $\mathbb{R}^4$ definido por A_i tenga matriz J_i^{real} y una matriz invertible Q_i tal que $AQ_i = Q_i J_i^{real}$.
Nota: Para facilitar los cálculos damos a continuación los polinomios característicos de cada matriz: **Para** A_1**:** $\left(X^2+1\right)^2$; **para** A_2**:** $\left(X^2-2X+2\right)\left(X^2+1\right)$; **para** A_3**:** $(X-4)^2 X^2$; **para** A_4**:** $X^2(X-1)^2$; **para** A_5**:** X^4; **para** A_6**:** X^4; **para** A_7**:** $(X+1)^4$; **para** A_8**:** X^4; **para** A_9**:** $(X+2)^4$.

17. Acerca del Teorema Espectral. Sea V un espacio vectorial (cuya dimensión puede ser finita o infinita). Dado un operador lineal $T : V \to V$, se define el espectro $\sigma(T)$ de T como el conjunto de escalares λ tales que $T - \lambda I$ no es inversible, donde I denota la identidad. En el caso finito dimensional $\sigma(T)$ es el conjunto de autovalores de T, pero en el caso de dimensión infinita el espectro puede ser más grande, como vamos a comprobar en el siguiente ejemplo. Denotamos mediante $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R})$ al conjunto de sucesiones de números reales $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ tales que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty$ (éste es un ejemplo típico de espacio de Hilbert). Definimos el operador desplazamiento a la derecha D_d mediante $D_d((a_0, a_1, \dots)) = (0, a_0, a_1, \dots)$.

a) Observa que $D_d = D_d - 0 \cdot I$ no es invertible. Más precisamente, observa que D_d no es invertible por la derecha, es decir, no existe ningún operador $T : \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R}) \to \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R})$ tal que $D_d \circ T = I$. Por tanto, $0 \in \sigma(D_d)$.

b) Demuestra que 0 no es un autovalor de D_d, es decir, no existe ningún vector v distinto de 0 tal que $D_d(v) = 0 \cdot v$.