1) El gran físico y matemático Gauss introdujo una formulación de la mecánica basada en el método de mínimos cuadrados llamada el *principio de la mínima ligadura* que afirma que la evolución mecánica de un sistema de N partículas hace que $\sum_{k=1}^{N} \|r_k\vec{a}_k - r_k^{-1}\vec{F}_k\|^2$ sea mínimo, donde r_k es la raíz cuadrada de la masa k-ésima, $\vec{a}_k$ su aceleración y $\vec{F}_k$ la fuerza que sufriría sin ligaduras. En este ejercicio vamos a ver cómo se aplicaría al caso de un péndulo de masa 1 utilizando álgebra lineal.

I) Dado $\vec{v} \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, sea el subespacio de $\mathbb{R}^n$ definido por $V = \big\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \,:\, \langle \vec{v}, \vec{x}\rangle = 0\big\}$. Para cada $\vec{F} \in \mathbb{R}^n$ fijado halla el vector $\vec{a} \in V$ que minimiza $\|\vec{a} - \vec{F}\|^2$.

II) Resuelve el apartado anterior pero ahora con $\vec{a} \in \widetilde{V} = \big\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \,:\, \langle \vec{v}, \vec{x}\rangle = c\big\}$ donde c es cierta constante. Indicación: Nota que $\widetilde{V}$ no es un subespacio pero puede transformarse en uno cambiando $\vec{x}$ por $\vec{x} + \vec{x}_0$.

III) En un péndulo simple se tiene $x^2 + y^2 = \ell^2$ que implica $x\ddot{x} + y\ddot{y} = -\dot{x}^2 - \dot{y}^2$, derivando dos veces. Además la fuerza (sin ligaduras) para masa 1 es la gravitatoria $(0, -g)^t$. Escribiendo $\vec{a} = (\ddot{x}, \ddot{y})^t$, $\vec{v} = (x, y)^t$ y $c = -\dot{x}^2 - \dot{y}^2$. Deduce de la fórmula del apartado anterior

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} + \frac{gy - \dot{x}^2 - \dot{y}^2}{\ell^2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

IV) Explica cómo se deduce de esta fórmula en cartesianas la ecuación del péndulo simple en su forma habitual $\ddot{\theta} + \ell^{-1} g \sin\theta = 0$. Indicación: La notación es la habitual, θ es la separación angular de la posición de equilibrio medida desde el eje Y negativo.

Comentarios: A pesar de que este ejercicio haya dado una forma innecesariamente compleja de obtener la ecuación del péndulo, los principios de máximo y mínimo tienen una importancia capital en física. Son de los pocos conceptos que han resistido a las grandes revoluciones de la física teórica del siglo XX e incluso han cobrado mayor vigor. Desde el punto de vista actual el principio de la mínima ligadura de Gauss está pasado de moda y es raro que lo veas en un curso posterior de mecánica, en el que seguro que se preferirá la formulación lagrangiana o hamiltoniana.

2) En el modelo estándar de la física de partículas las interacciones tienen asociados ciertos grupos de simetrías (que en realidad son grupos de matrices unitarias) a partir de los cuales se construyen subespacios vectoriales V sobre $\mathbb{R}$ de matrices hermíticas. Los *bosones* que median las interacciones matemáticamente corresponden a los elementos de ciertas bases de estos subespacios, así que el número de bosones es $\dim V$.

I) Sea $\mathcal{H}_n$ el conjunto de matrices hermíticas $n \times n$. Explica por qué a pesar de que los elementos de $\mathcal{H}_n$ son matrices complejas, forman un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y no sobre $\mathbb{C}$.

II) Para la *interacción fuerte* $V = \big\{H \in \mathcal{H}_3 \,:\, \mathrm{Tr}(H) = 0\big\}$. Halla el número de bosones de

---

Las hojas opcionales tratan de mostrar la aplicación de la asignatura en diferentes temas de física. Son una propuesta de F. Chamizo. Si durante el curso 2018–2019 tienes alguna duda que no te resuelven en la clase de problemas, consulta con él. Los apartados con asterisco son más difíciles.

esta interacción. En el modelo estándar se representa a todos con g y se les llama *gluones*.

III) Para la *interacción electro-débil* $V = \big\{H \in \mathcal{H}_3 \,:\, h_{11}+h_{22} = h_{3j} = h_{j3} = 0 \text{ para } j \neq 3\big\}$. Halla el número de bosones de esta interacción. En el modelo estándar se representa estos bosones con γ (*fotón*), Z y $W^{\pm}$.

IV) Para la teoría es importante que V sea un espacio euclídeo. Prueba que en el caso de la interacción electro-débil la fórmula $\langle H_1, H_2\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(H_1H_2)$ define un producto escalar en V y halla una base ortonormal. Indicación: Si te suenan las *matrices de Pauli*, quizá te aparezcan por aquí.

Comentarios: En la interacción fuerte que las matrices sean 3×3 está relacionado con que haya tres posibles *colores* de quarks, con sus correspondientes *anticolores*. Sobre todo en la divulgación, se presentan los gluones mediando un cambio de color, lo que conduce a pensar erróneamente que debe haber 9 posibilidades. La forma de resolver esta paradoja es considerar las matrices que constituyen el verdadero modelo.

3) Las simetrías en física cuántica se representan en términos de grupos de matrices unitarias. Estas matrices a veces no tienen las mismas dimensiones del espacio ambiente y en este contexto aparecen las llamadas *representaciones*. Son funciones continuas ρ que en cierto modo adaptan la dimensión de las matrices conservando los productos, es decir $\rho(AB) = \rho(A)\rho(B)$. En este ejercicio vamos a considerar matrices 2×2 asociadas al espín y construiremos una representación que las pasa a dimensión 3 que es lo que correspondería a partículas de espín 1.

I) Se llama SU(2) al conjunto de matrices unitarias 2×2 con determinante 1. Explica por qué $U_1, U_2 \in \mathrm{SU}(2)$ implica $U_1U_2 \in \mathrm{SU}(2)$. Comprueba además que $M_\sigma(\alpha) = I\cos\alpha + i\sigma \operatorname{sen}\alpha$ está en SU(2) para $\alpha \in \mathbb{R}$ y σ cualquiera de las tres matrices de Pauli. Indicación: Si a pesar del problema anterior todavía no sabes cuáles son estas matrices, internet y los libros existen.

II) Considera el espacio vectorial V sobre $\mathbb{C}$ de polinomios de dos variables

$$V = \{\lambda_1x^2 + \lambda_2xy + \lambda_3y^2 \,:\, \lambda_j \in \mathbb{C}\} \quad \text{y la base } \mathcal{B} = \{x^2, \sqrt{2}xy, y^2\}.$$

Fijada $U = (u_{ij})_{i,j=1}^2 \in \mathrm{SU}(2)$ considera la aplicación lineal que envía cada $P(x,y) \in V$ en $P(u_{11}x + u_{21}y, u_{12}x + u_{22}y)$. Halla la matriz de esta aplicación en la base $\mathcal{B}$ para $U = M_\sigma(\alpha)$, con σ la matriz de Pauli que prefieras, y comprueba que es una matriz unitaria 3×3.

*III) Para cada $U \in \mathrm{SU}(2)$ sea $\rho(U)$ la matriz de la aplicación lineal del apartado anterior. Prueba que $\rho(U_1U_2) = \rho(U_1)\rho(U_2)$ y que $\rho(U)$ es unitaria. Indicación: La primera parte se puede hacer si ninguna cuenta. Para la segunda es conveniente buscar alguna forma de parametrizar SU(2) para simplificar la comprobación.

Comentarios: Por supuesto, es fácil pasar matrices unitarias de dimensión 2 a dimensión 3 basta copiar la misma matriz en el bloque superior izquierdo y completar con ceros y $u_{33} = 1$. Lo importante es que en ninguna base la matriz se transforme en una matriz por bloques sea cual sea U porque eso significaría físicamente que las simetrías son lo más finas posibles, que no hay otras que las impliquen. Se dice que la representación es *irreducible*. Así es la que hemos hallado. Esta difícil teoría tuvo una oposición inicial por grandes figuras de la física como Schrödinger y Pauli (que hablaban de “la plaga de los grupos”) pero después de diferentes contribuciones, especialmente la de Wigner, se incorporó al acervo matemático de los físicos teóricos. Un punto de inflexión fue la predicción de Gell-Mann de una nueva partícula y de los *quarks* utilizando representaciones.

4) Dados V_1 y V_2 espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo con bases $\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n\}$ y $\{\vec{w}_1,\dots,\vec{w}_m\}$, para representar combinaciones de sistemas en física es conveniente emparejar sus elementos en las nm posibilidades, lo que conduce al concepto de *producto tensorial* $V_1\otimes V_2$ generado por parejas de los elementos de las bases que en matemáticas se denotan con $\vec{v}_i\otimes\vec{w}_j$ mientras que en física se podría llamar $|i\rangle$ a $\vec{v}_i$, $|j\rangle$ a $\vec{w}_j$ (a pesar de la ambigüedad) y escribir $|ij\rangle$ para el “emparejamiento” $\vec{v}_i\otimes\vec{w}_j$. Más allá de la definición abstracta, lo que se pide al producto tensorial, y lo caracteriza, es que opere las combinaciones lineales como los paréntesis habituales. Así para $\vec{x}=\lambda_1\vec{x}_1+\lambda_2\vec{x}_2$, $\vec{y}=\mu_1\vec{y}_1+\mu_2\vec{y}_2$, se tiene

$$\vec{x}\otimes\vec{y}=\lambda_1\mu_1\vec{x}_1\otimes\vec{y}_1+\lambda_1\mu_2\vec{x}_1\otimes\vec{y}_2+\lambda_2\mu_1\vec{x}_2\otimes\vec{y}_1+\lambda_2\mu_2\vec{x}_2\otimes\vec{y}_2.$$

Si V_1 y V_2 son euclídeos o hermíticos, en $V_1\otimes V_2$ hay un producto escalar natural definido como $\langle\vec{v}_1\otimes\vec{v}_2,\vec{w}_1\otimes\vec{w}_2\rangle=\langle\vec{v}_1,\vec{w}_1\rangle\langle\vec{v}_2,\vec{w}_2\rangle$. Dadas aplicaciones lineales $A_1: V_1\longrightarrow W_1$, $A_2: V_2\longrightarrow W_2$, se define su producto tensorial $A_1\otimes A_2: V_1\otimes V_2\longrightarrow W_1\otimes W_2$ como $(A_1\otimes A_2)(\vec{v}_1\otimes\vec{v}_2)=(A_1\vec{v}_1)\otimes(A_2\vec{v}_2)$.

I) Considera la aplicación lineal $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ con $f\big((x,y)^t\big)=(x+2y,3y)^t$. Si $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ es la base canónica en $\mathbb{R}^2$, calcula la matriz de $f\otimes f$ en la base $\{\vec{e}_1\otimes\vec{e}_1,\vec{e}_1\otimes\vec{e}_2,\vec{e}_2\otimes\vec{e}_1,\vec{e}_2\otimes\vec{e}_2\}$ de $\mathbb{R}^2\otimes\mathbb{R}^2$. Indicación: Si quieres ver un patrón quizá te interese buscar qué es el *producto de Kronecker* de matrices.

II) En física cuántica las aplicaciones lineales hermíticas corresponden a *observables*. Si A y B son observables, ¿es $A\otimes B$ también un observable?

III) Prueba que si T_1 y T_2 son unitarias (u ortogonales) entonces $T_1\otimes T_2$ también es unitaria (u ortogonal).

*IV) En los albores de la física cuántica Heisenberg, Born y Jordan consideraron los observables posición q y momento p representados por matrices infinitas que satisfacían $qp-pq=i\hbar\,\mathrm{Id}$ con Id la identidad y $\hbar$ una constante (la reducida de Planck). Demuestra que tal identidad es imposible con matrices finitas. Indicación: Esto es en gran medida de idea feliz. Si no se te ocurre intenta ver qué obstrucción hay en dimensión 2 y trata de generalizar.

Comentarios: En un principio Heisenberg elaboró un modelo con una operación no conmutativa para explicar las transiciones de estado en los átomos. Born se dio cuenta de que tal modelo se escribía de una forma atractiva y compacta usando matrices hermíticas y todo aquello culminó en el llamado “artículo de los tres hombres” de 1926 en que Born, Jordan y Heisenberg dieron una fundamentación de la mecánica cuántica matricial. Más adelante Heisenberg dijo que en su primer trabajo no sabía qué era una matriz ni cómo se multiplicaba. A día de hoy esto sería una limitación muy severa para seguir la mayor parte de las asignaturas del grado de física.

5) Se llama *qubit* a un vector de $\mathbb{C}^2$ en el que se utiliza habitualmente la notación $|0\rangle$ y $|1\rangle$ para los vectores $\vec{e}_1$ y $\vec{e}_2$ de la base canónica. Las únicas tareas que puede realizar un *ordenador cuántico* de k qubits es hacer actuar aplicaciones unitarias en $\mathbb{C}^2 \otimes \overset{k \text{ veces}}{\cdots\cdots} \otimes \mathbb{C}^2$. A estas aplicaciones o a sus matrices, que son $2^k \times 2^k$, se les llama en este contexto *puertas cuánticas*.

I) Se denomina NOT a la puerta cuántica que aplica $|0\rangle \mapsto |1\rangle$ y $|1\rangle \mapsto |0\rangle$. Halla una puerta cuántica U tal que $U^2 = NOT$. Indicación: Por supuesto, aquí se tiene $k = 1$.

II) Halla la matriz de la puerta cuántica que aplica $|\phi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle$ en $U|\phi_1\rangle \otimes U|\phi_2\rangle$ para cada par de qubits $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle \in \mathbb{C}^2$ y comprueba que es unitaria. Indicación: Debiera estar claro que buscamos una matriz 4×4 porque estamos en el caso $k = 2$. Si has seguido el consejo anterior de mirar el producto de Kronecker, lo podrás hacer muy rápido.

III) Demuestra que existe una puerta cuántica que aplica $|j0\rangle$ en $|jj\rangle$ para $j \in \{0, 1\}$.

IV) Demuestra el *no-cloning theorem* que afirma que no existe ninguna puerta cuántica que aplique $|\phi\rangle \otimes |0\rangle$ en $|\phi\rangle \otimes |\phi\rangle$ para todo qubit $|\phi\rangle$. Esto impone una limitación para que un ordenador cuántico copie qubits. Indicación: Por el apartado anterior, no es sensato llegar a una contradicción eligiendo $|\phi\rangle$ como $|0\rangle$ o $|1\rangle$.

Comentarios: En términos clásicos no hay nada que impida que un sistema con dos estados sea clonado, esto permite algo más fuerte que la teleportación cuántica. Simplemente si quiero transmitir el estado “ha salido cara” de aquí a la Luna, hago una llamada para que pongan una moneda mostrando una cara. A nivel cuántico, las cosas son más complicadas porque las mediciones típicamente alteran la información.