ÁLGEBRA II

Hoja 2. Aplicaciones lineales entre espacios vectoriales euclídeos o unitarios.

Nota: En esta hoja cuando no se indica un producto escalar específico hay que emplear el usual en $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$ y los espacios vectoriales se suponen de dimensión finita.

1. Calcula la expresión analítica de la proyección ortogonal sobre la recta de $\mathbb{R}^3$, $l \equiv \{x = y = z\}$. Calcula la proyección ortogonal sobre l del vector $(0, 1, 2)$.

2. Usando el producto escalar usual, encuentra la expresión en coordenadas de la proyección ortogonal sobre la recta $l \equiv \{x - (1 + i)z = 0,\ y = 0\}$ en $\mathbb{C}^3$.

3. En $\mathbb{R}^3$ se considera el producto escalar cuya matriz es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Calcula la proyección ortogonal sobre el plano $\{y + z = 0\}$ del vector $(1, 1, 1)$.

4. Sea V el espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ de las matrices cuadradas de orden 2. Usando el producto escalar $\varphi(A, B) = \text{traza}(A\overline{B}^t)$ encuentra la expresión en coordenadas de la proyección ortogonal sobre el plano generado por $\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\}$.

5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal cuya matriz es

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & 1 - \alpha \end{pmatrix} \qquad \text{con} \quad \alpha = \frac{b^2}{a^2 + b^2}, \quad \beta = -\frac{ab}{a^2 + b^2}.$$

Demuestra que f da la proyección ortogonal sobre la recta $ax + by = 0$.

6. La siguiente lista corresponde a los datos recogidos por un trabajador autónomo. En ella se ilustra la proporción de las ganancias que ha destinado a ampliar su negocio durante los seis últimos años:

Años	1	2	3	4	5	6
Proporción invertida	0,20	0,25	0,20	0,35	0,45	0,40

Calcula la ecuación de la recta de regresión y úsala para estimar la proporción esperada para el séptimo año.

7. Considera la nube de puntos dada por la siguiente tabla:

0	2	4	6	8	10
4,7	4,8	4,9	5,7	5,9	6,9

Usando regresión lineal y quizá con la ayuda de un ordenador:

- **a)** Ajusta estos datos con una recta.
- **b)** Ajusta estos datos con una parábola.
- **c)** Halla el error cuadrático medio en ambos casos.

8. Encuentra la aplicación adjunta de:

a) $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, con $h(x, y, z) = (x + y + z, x + 2y + 2z, x + 2y + 3z)$ con el producto escalar usual.

b) La misma aplicación del apartado anterior con el producto escalar con matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

c) La aplicación $g : V_2 \to V_2$ dada por $g(p(x)) = xp'(x)$ donde V_2 son los polinomios reales de grado a lo más dos con el producto escalar $\varphi\big(p(x), q(x)\big) = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\,dt$.

d) La aplicación $T : \mathbb{M}_{3\times3}(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$ dada por $T(A) = A^t + A$ con el producto escalar definido por $\varphi(A, B) = \text{traza}(AB^t)$.

9. Sea V un espacio vectorial euclídeo o unitario y sean $I_V, f, g : V \to V$ donde I_V es la identidad y f, g son dos endomorfismos cualesquiera. Demuestra las siguientes propiedades de la adjunta, que se indica con tilde:

a) $\widetilde{I_V} = I_V$;

b) $\widetilde{\widetilde{f}} = f$;

c) $\widetilde{f + g} = \widetilde{f} + \widetilde{g}$;

d) $\widetilde{f \circ g} = \widetilde{g} \circ \widetilde{f}$;

e) Si f es biyectiva, entonces $\widetilde{f^{-1}} = (\widetilde{f})^{-1}$;

f) $(\text{Im } f)^{\perp} = \text{Ker}\widetilde{f}$;

g) $(\text{Ker} f)^{\perp} = \text{Im } \widetilde{f}$.

10. Escribe la expresión en coordenadas de la proyección ortogonal sobre $\{x + iz = 0,\ y = x\}$ en $\mathbb{C}^3$. ¿Es autoadjunta? ¿Es unitaria?

11. Consideramos $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar usual y sea $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotación de ángulo α. Determina la adjunta de h. ¿Es h ortogonal?

12. Sea l una recta que pasa por el origen en $\mathbb{R}^2$ donde consideramos el producto escalar usual. Demuestra que la simetría respecto a l es una aplicación ortogonal.

13. Prueba que en la base canónica la matriz U de una aplicación lineal unitaria $f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ tiene determinante 1 si y solo si $u_{11} = \overline{u}_{22} = e^{i\beta}\cos\alpha$ y $u_{21} = -\overline{u}_{12} = e^{i\gamma}\,\text{sen}\,\alpha$ con $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 2\pi)$.

14. Desde el punto de vista teórico se dice que una aplicación lineal $P : V \longrightarrow V$ con V euclídeo o unitario es una proyección si $P^2 = P$ y que es *ortogonal* si además $\ker P = (\text{Im}\, P)^{\perp}$. Fijado un subespacio $W \subset V$, podemos considerar el conjunto X de todas las proyecciones $P : V \to V$ con $\text{Im } P = W$.

a) Demuestra que las proyecciones ortogonales minimizan la longitud del vector $u - P(u)$, esto es, si T es la proyección ortogonal sobre W demuestra que $\|u - T(u)\| = \min\{\|u - P(u)\| : P \in X\}$. *Sugerencia: Escribe* $u - P(u)$ *como* $\big(T(u) - P(u)\big) + \big(u - P(u)\big)$.

b) Demuestra que P es una proyección ortogonal si y sólo si es una proyección autoadjunta. *Sugerencia: Prueba primero que* $(Pu, v) = (Pu, Pv)$.