1) El *tensor de inercia* es una forma bilineal $I : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ asociada a cada sólido rígido $V \subset \mathbb{R}^3$ de densidad ρ. En la base canónica los elementos de su matriz vienen dados por $I_{ij} = \iiint_V \big(\delta_{ij}(x_1^2+x_2^2+x_3^2) - x_i x_j\big)\rho\, dx_1 dx_2 dx_3$ donde $\delta_{ii} = 1$, $\delta_{ij} = 0$ para $i \neq j$ y $x_1,\ x_2,\ x_3$ indican las variables $x,\ y,\ z$. Su interés radica en que el valor de $I(\vec{\omega}, \vec{\omega})$ es el doble de la energía que cuesta girar el sólido con velocidad angular $\vec{\omega}$ (alrededor del origen).

Si V es un cilindro vertical homogéneo de masa M dado por $x^2 + y^2 \le R^2$, $|z| \le h/2$, se puede probar que $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{12}Mh^2 + \frac{1}{4}MR^2$, $I_{33} = \frac{1}{2}MR^2$ y el resto de los I_{ij} son nulos.

I) ¿Qué es más fácil, girar una moneda por un diámetro o por un eje perpendicular a su superficie a través del centro? Explica también usando I el hecho intuitivamente obvio de que es más fácil girar una varilla por un eje perpendicular a ella.

II) Si giro la cabeza $45°$ en sentido positivo en el plano YZ, ¿qué tensor de inercia observaré?

III) Halla el tensor de inercia de un cilindro como V pero con $x^2 + y^2 < R^2/4$ hueco. Trata de explicar físicamente por qué este objeto tiene I_{ii} mayores que los de un V con la misma masa. Indicación: Posiblemente lo más sencillo pase por escribir primero I_{ii} en términos de la densidad en vez de la masa. Recuerda la aditividad de las integrales.

*IV) Prueba las fórmulas $I_{11} = \frac{1}{12}Mh^2 + \frac{1}{4}MR^2$, $I_{33} = \frac{1}{2}MR^2$. Indicación: La única razón por la que este apartado es más complicado es porque quizá desconozcas cómo hacer integrales múltiples. Si es el caso, trata de trabajar con zonas de grosor infinitesimal y cierta simetría. Como tarea extra o ayuda puedes pensar por qué para figuras casi planas (altura en z despreciable) se tiene $I_{11} + I_{22} \approx I_{33}$.

Comentarios: Se llama *tensor* a una forma multilineal que acaba en $\mathbb{R}$ o en $\mathbb{C}$. Cuando tiene un solo argumento se puede identificar con un vector fila y cuando tiene dos argumentos con una forma bilineal. Los tensores de tres o más argumentos son una especie de aplicaciones lineales cuyas “matrices” son de dimensión superior a dos. El tensor de inercia, como tantos otros tensores simétricos en física con dos argumentos se usa sobre todo con ambos argumentos iguales para obtener una *forma cuadrática*: un polinomio con todos sus monomios de segundo grado.

2) En dimensión 2, el *tensor de Minkowski* $M : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es la forma bilineal que en la base canónica tiene una matriz diagonal con $m_{11} = -m_{22} = 1$. Para $\beta \in (-1, 1)$ se definen las *transformaciones de Lorentz* como cada una de las aplicaciones lineales

$$L_\beta : \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

En la relatividad especial, L_β permite pasar las mediciones de un sistema inercial a otro. La notación es $\beta = v/c$ con v la velocidad relativa y c la velocidad de la luz y $x_0 = ct$, $x_1 = x$

Las hojas opcionales tratan de mostrar la aplicación de la asignatura en diferentes temas de física. Son una propuesta de F. Chamizo. Si durante el curso 2018–2019 tienes alguna duda que no te resuelven en la clase de problemas, consulta con él. Los apartados con asterisco son más difíciles.

con t y x las mediciones de intervalos de tiempo y espacio.

i) Comprueba que L_β deja invariante el tensor de Minkowski.

ii) Prueba que para cada $\beta_1, \beta_2 \in (-1,1)$ existe β_3 tal que $L_{\beta_3} = L_{\beta_1} L_{\beta_2}$ y deduce de ello una fórmula para la adición de velocidades relativas, comprobando que siempre que $v_1, v_2 \in (-c, c)$ se tiene $v_3 \in (-c, c)$. En este sentido la velocidad de la luz es inalcanzable por adición de velocidades menores. Indicación: Este apartado se puede hacer con una cantidad muy reducida de cálculos. Nota que una matriz proporcional a la de L_β con determinante uno debe coincidir con ella.

iii) Todos aseguraríamos que las velocidades relativas se suman de la forma habitual $v_1 + v_2$ pero el apartado anterior implica que no es así. Explica esta paradoja aproximando el error relativo de la fórmula habitual por ejemplo para $v_1 = v_2 = 900\ km/h$ que es como la velocidad de crucero de un avión comercial.

*iv) Demuestra que cualquier transformación lineal que deja invariante el tensor de Minkowski es una transformación de Lorentz salvo quizá por una aplicar primero una “inversión temporal” $x_0 \mapsto -x_0$. Indicación: Esto equivale a ver que o bien tiene la matriz de alguna L_β o bien la primera columna está cambiada de signo. El reto es resolver este apartado minimizando los cálculos.

Comentarios: Minkowski, que fue profesor de Einstein, introdujo el espacio-tiempo junto con una forma geométrica de ver las transformaciones de Lorentz que respalda este ejercicio. Con ello se simplifican cálculos y conceptos a costa de pagar con abstracción. Einstein vio al principio con recelo esta idea que le pareció innecesaria (llegó a decir que desde que los matemáticos habían invadido la relatividad ni él mismo la entendía) pero cuando se percató de que era muy útil para desarrollar la teoría general de la relatividad, cambió radicalmente de opinión. Irónicamente muchos autores atribuyen a Einstein el concepto de espacio-tiempo en vez de a Minkowski.

3) En electrodinámica clásica relativista, el campo electromagnético se representa por una forma bilineal $F : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ llamada *tensor de Faraday* cuya matriz en la base canónica es antisimétrica y cumple

$$F_{12} = E_1, \quad F_{13} = E_2, \quad F_{14} = E_3, \quad F_{23} = -B_3, \quad F_{24} = B_2, \quad F_{34} = -B_1$$

donde c es la velocidad de la luz y $\vec{E} = (E_1, E_2, E_3)$ y $\vec{B} = (B_1, B_2, B_3)$ son la intensidad de campo eléctrico y la inducción magnética (en unidades gaussianas), que seguramente conoces. La ventaja de crear esta forma bilineal a partir de $\vec{E}$ y $\vec{B}$ es que para saber cómo varían al cambiar de sistema de referencia inercial basta cambiar de base F con la transformación de Lorentz que liga los sistemas.

i) Aplicando la transformación L_β de un ejercicio anterior completada con $x_2' = x_2$, $x_3' = x_3$, comprueba que el E_1 observado por un observador en reposo y por otro con velocidad relativa $(v, 0, 0)$ coinciden. Indicación: Antes de embarcarte en un montón de cuentas, piensa que no es necesario que cambies toda la forma F de base porque solo necesitas un elemento de su matriz.

ii) Procediendo como en el apartado anterior, deduce que la relación entre el E_2 medido por un observador en reposo y el E_2' medido por otro con velocidad relativa $(v, 0, 0)$ es $E_2' =$

$(1-v^2/c^2)^{-1/2}(E_2-vB_3/c)$. Indicación: Si el signo no te cuadra, piensa que L_β pasa de coordenadas sin prima a coordenadas con prima. Esto también se aplica al apartado anterior pero allí era irrelevante porque las componentes coincidían.

*iii) Prueba que para una carga con velocidad $(v,0,0)$ nos parecerá que la ley de Coulomb falla y se transforma en

$$\vec{E} = \frac{\gamma q(x-vt,y,z)}{\big(\gamma^2(x-vt)^2+y^2+z^2\big)^{3/2}} \qquad \text{con} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Explica por qué para velocidades mucho menores que c esto es indistinguible de la ley de Coulomb desde la posición en la que está la carga en el instante t. Indicación: La dificultad de este apartado se aplica si no sabes que la ley de Coulomb es $\vec{E} = q\vec{r}/\|\vec{r}\|^3$ (en unidades gaussianas) y que presupone la ausencia de campo magnético.

4) El espín de un electrón es una especie de imán asociado a él y en física cuántica se representa con un vector unitario $a\vec{e}_1+b\vec{e}_2 \in \mathbb{C}^2$ donde $|a|^2$ y $|b|^2$ indican las probabilidades de que al hacer un experimento notemos el polo norte arriba o abajo, respectivamente y $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ es la base canónica de $\mathbb{C}^2$. Para un sistema de dos electrones se representa como una forma bilineal $\mathbb{C}^2\times\mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ cuya matriz A cumple que $|a_{ij}|^2$ son las probabilidades de cada medición donde un subíndice 1 significa arriba y 2 significa abajo, por ejemplo $|a_{12}|^2$ es la probabilidad de medir el primero arriba y el segundo abajo mientras que $|a_{22}|^2$ es la probabilidad de medir ambos abajo. Si no existen $\vec{v},\vec{w} \in \mathbb{C}^2$ tales que $a_{ij} = v_i w_j$ se dicen que los dos electrones están *entrelazados* y de algún modo esto significa que no se pueden considerar como partículas independientes.

i) ¿Qué condición debe satisfacer una forma bilineal de matriz A para que corresponda a un sistema de dos electrones? Indicación: Simplemente utiliza la interpretación probabilista.

ii) Decide cuales de los sistemas expresados por las formas bilineales con las siguientes matrices no están entrelazados y en su caso halla los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ correspondientes. Comprueba que se cumple la condición del apartado anterior.

$$\frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{pmatrix}3 & 3\\ 4 & 4\end{pmatrix}, \qquad \frac{1}{10}\begin{pmatrix}1 & 7i\\ 7 & -1\end{pmatrix}, \qquad \frac{1}{6}\begin{pmatrix}i & -1\\ 1-4i & 4+i\end{pmatrix}.$$

iii) Prueba que dos electrones están entrelazados si y sólo si la matriz asociada A tiene determinante no nulo. Indicación: Esto no es tan difícil como para tener un asterisco pero si no organizas elegantemente la prueba te puede parecer liosa.

Comentarios: Para un sistema de n electrones tendríamos que trabajar con colecciones de números $a_{i_1 i_2 \dots i_n}$ y ya en el caso $n=3$ no existe una caracterización sencilla del entrelazamiento en términos de estos números. En la notación física, se suele escribir $|\!\uparrow\rangle$ y $|\!\downarrow\rangle$ o $|+\rangle$ y $|-\rangle$ en lugar de $\vec{e}_1$ y $\vec{e}_2$. La manera más práctica de trabajar con sistemas de partículas con espín es introducir una operación llamada *producto tensorial* que los matemáticos denotan con $\otimes$ y que los físicos a menudo abrevian en este contexto. Así por ejemplo los primeros escribirían $\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1$ frente al $|\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\rangle$ físico para indicar un *estado puro* de cuatro partículas, las dos primeras con espín abajo y las otras con espín arriba.

5) Posiblemente el ejemplo más importante en física cuántica es el oscilador armónico. En términos matemáticos, lo que uno busca son funciones $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ distintas de la nula y con $x^2\psi''$ acotado que cumplan que $-\psi'' + x^2\psi$ sea un múltiplo constante de ψ. Llamaremos $\mathcal{V}$ al conjunto de funciones de este tipo. Físicamente, cada $\psi \in \mathcal{V}$ da un posible comportamiento mecánico cuya energía es $E = K\hbar\omega/2$ donde K es la constante de proporcionalidad, $\hbar$ es la *constante de Planck reducida* ($\approx 1{,}05 \cdot 10^{-34} J \cdot s$) y ω es frecuencia angular del oscilador. Es decir, $-\psi'' + x^2\psi = 2E\hbar^{-1}\omega^{-1}\psi$.

I) Comprueba que $\psi_0 = e^{-x^2/2}$ está en $\mathcal{V}$ y halla su energía.

II) Sean ψ_j, $0 \le j \le n$ las funciones obtenidas al ortogonalizar $\{\psi_0, x\psi_0, x^2\psi_0, \dots x^n\psi_0\}$ con el proceso de Gram-Schmidt usando el producto escalar de funciones $\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} fg$. Sabiendo que $\int_{\mathbb{R}} x^{2n}e^{-x^2}\, dx$ es $4^{-n}\sqrt{\pi}(2n)!/(n!)$ para $n \ge 0$, calcula ψ_1, ψ_2 y ψ_3. Indicación: Si este apartado te parece largo es que no te estás dando cuenta de que para hallar $0 \cdot x$ el valor de x es innecesario.

III) Comprueba que $\psi_1, \psi_2, \psi_3 \in \mathcal{V}$ y que tienen energías $3\hbar\omega/2$, $5\hbar\omega/2$ y $7\hbar\omega/2$, respectivamente.

*IV) Demuestra que cualquier ψ_n está en $\mathcal{V}$ y que su energía es $\hbar\omega(n + 1/2)$ siguiendo este esquema: comprueba con cálculos directos que $\psi_n \in \mathcal{V}$ implica $x\psi_n - \psi_n' \in \mathcal{V}$ e integrando por partes $\langle x\psi_n - \psi_n', \psi_m\rangle = \langle x\psi_m + \psi_m', \psi_n\rangle$. Trata de deducir que estos productos escalares son nulos para $m \le n$ y de ello que ψ_{n+1} es un múltiplo constante de $x\psi_n - \psi_n'$. Indicación: Observa que el proceso de Gram-Schmidt implica que ψ_n es ortogonal a ψ_0 multiplicado por cualquier polinomio de grado menor que n.

Comentarios: La operación mágica $x\psi - \psi'$ que pasa una función de $\mathcal{V}$ a otra de energía mayor esencialmente será lo que en cursos superiores llamarás el *operador de creación*. El nombre proviene de que el aumento de la energía se asocia a crear una partícula nueva en ciertos contextos. Se puede probar que las ψ_n son todas las funciones de $\mathcal{V}$, salvo multiplicar por constantes, en particular la energía está cuantizada y su mínimo es $\hbar\omega/2$, en vez de cero como en la física clásica. La teoría cuántica de campos sitúa osciladores en cada punto y la contribución de todos ellos se traduce en que la energía del vacío ¡es infinita!