ÁLGEBRA II

Hoja 1. Espacios euclídeos y unitarios (espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$ y sobre $\mathbb{C}$).

1. Decide de manera razonada si las siguientes funciones $\varphi : V \times V \to \mathbb{K}$ son formas bilineales o sesquilineales en los espacios vectoriales V sobre $\mathbb{K}$ con $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

a) $V = \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{K})$, con $\varphi(A, B) = \text{traza}(A + \overline{B})$;

b) $V = \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{K})$, con $\varphi(A, B) = \text{traza}(A\overline{B})$;

c) $V = \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, con $\varphi(A, B) = \text{traza}(A\overline{B}) - \text{traza}(A)\text{traza}(\overline{B})$;

d) $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ es diferenciable}\}$, con $\varphi(f, g) = \int_0^1 f'(t)g(t)dt$;

e) $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ es continua}\}$, con $\varphi(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)(x^2 + 1)dx$;

f) $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ es continua}\}$, con $\varphi(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x - 1)dx$;

g) $V = \mathbb{K}^2$, con $\varphi((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = (x_1 + y_1)^2 - x_2y_2$.

Nota: Siguiendo la bibliografía, en este curso las formas sesquilineales son lineales en la primera variable pero en la literatura física y también en parte de la matemática, se consideran formas lineales en la segunda variable.

2. Considera la base estándar $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$. Escribe la matriz $M_B(\varphi)$ de las siguientes formas bilineales:

a) $\varphi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 2x_1y_1 - 3x_1y_3 + 2x_2y_2 - 5x_2y_3 + 4x_3y_1$;

b) $\varphi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) = 3x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3$.

3. Considera ahora la base $B' = \{(1, 2, 3), (-1, 1, 2), (1, 2, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y denotamos por $(x_1', y_1', z_1'), (x_2', y_2', z_2')$ las coordenadas de dos vectores de $\mathbb{R}^3$ respecto a la base B'. Escribe la expresión en términos de las coordenadas anteriores de las formas bilineales del ejercicio 2.

4. Decide de manera razonada cuáles de las funciones del ejercicio 1 son formas bilineales simétricas, o sesquilineales hermíticas, según corresponda.

5. Se dice que una forma bilineal (respectivamente, sesquilineal) $\varphi : V \times V \to \mathbb{K}$ es antisimétrica si para todo par de vectores $u, v \in V$ se tiene que $\varphi(u, v) = -\varphi(v, u)$.

a) Encuentra una forma bilineal antisimétrica $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$;

b) Sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V y sea φ una forma bilineal en V. Da una condición necesaria y suficiente sobre $M_B(\varphi)$ para que φ sea antisimétrica;

c) Demuestra que toda forma bilineal (respectivamente, sesquilineal) φ en V se puede escribir como la suma de una forma bilineal simétrica (respectivamente, hermítica) y una antisimétrica.

6. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, sea $\varphi : V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineal simétrica (o hermítica) y sea $W \subset V$ un subespacio vectorial. Demuestra que el conjunto:

$$W' := \{v \in V : \varphi(v, w) = 0, \forall w \in W\}$$

es un subespacio vectorial de V. Se dice que W' es el *subespacio ortogonal a* W.

7. Considera la aplicación $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) \quad \to \quad (2x_1 - 2x_2 + 4x_3)y_1 + (-2x_1 - 2x_3)y_2 + (6x_3 + 4x_1 - 2x_2)y_3.$$

a) Demuestra que ϕ es una forma bilineal simétrica.

b) Calcula el subespacio ortogonal al generado por el vector $(1,-1,-1)$ respecto a ϕ.

c) Describe geométricamente el conjunto de rectas de $\mathbb{R}^3$ que pasan por el origen y son ortogonales a sí mismas respecto a la forma ϕ.

8. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ considera en $\mathbb{R}^3$ la aplicación bilineal

$$\phi_\alpha\left((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\right) = (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

a) Calcula los valores de α para los que ϕ_α es un producto escalar.

b) Sea M_α el plano ortogonal a $(1,1,1)$ respecto a ϕ_α. Demuestra que el conjunto $\{M_\alpha : \alpha \in \mathbb{R}\}$ es un haz de planos que pasa por una recta. Describe la recta.

9. Para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ considera en $\mathbb{R}^3$ la aplicación bilineal

$$\phi_{\alpha,\beta}\left((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\right) = (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} \beta & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

a) Describe el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ determinado por los pares (α,β) para los que $\phi_{\alpha,\beta}$ es un producto escalar.

b) Determina los valores de α y β para que el plano de ecuación $x+y+z=0$ sea ortogonal al vector $(1,0,1)$ respecto al producto escalar $\phi_{\alpha,\beta}$.

10. Considera la aplicación $\phi : \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \times \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por $\phi(A,B) = \text{traza}\,(AB^T)$.

a) Demuestra que ϕ es un producto escalar en $\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

b) ¿Cuál sería el producto escalar análogo en $\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$?

11. Sea $V = \mathbb{C}^3$ y sea $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base estándar. Sea $\varphi : V \times V \to \mathbb{C}$ la forma sesquilineal cuya matriz asociada respecto a B es:

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 2 & 1+i \\ 0 & 1-i & 3 \end{pmatrix}$$

Demuestra que φ es un producto escalar.

12. Sea V un espacio vectorial unitario.

a) Demuestra la **Identidad del paralelogramo**: *Para todo par de vectores $u, v \in V$,*

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

b) Demuestra la **Identidad de polarización**: *Para todo par de vectores $u, v \in V$,*

$$4\varphi(u,v) = \|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 + i\|u+iv\|^2 - i\|u-iv\|^2.$$

c) ¿Cuál es el análogo de la identidad anterior si V es un espacio vectorial euclídeo?

13. Sea $\|x\| = |x_1| + |x_2|$ definida en $\mathbb{R}^2$. Demuestra que $\|\cdot\|$ es una norma en $\mathbb{R}^2$, que no proviene de ningún producto escalar porque no satisface la ley del paralelogramo.

14. Sea V un espacio vectorial euclídeo con un producto escalar φ y sea $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$ la norma inducida por φ. Sean $u, v \in V$. Demuestra que los vectores $u+v$ y $u-v$ son ortogonales si y sólo si $\|u\| = \|v\|$. ¿Vale la equivalencia si V es unitario?

15. Sea V un espacio euclídeo o unitario. Demuestra la siguiente generalización del teorema de Pitágoras:

$$\|v_1 + v_2 + \cdots + v_n\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 + \cdots + \|v_n\|^2,$$

si los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ son ortogonales dos a dos.

16. Sea $V_n = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : \text{grado}(p(x)) \leq n\}$ para un cierto $n \in \mathbb{N}$. En $V_n \times V_n$ considera la aplicación

$$\phi(p(x), q(x)) = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt.$$

a) Demuestra que ϕ es un producto escalar.

b) Describe el subespacio de polinomios ortogonales al polinomio x.

c) Para $n = 3$ calcula una base ortogonal de V_3.

d) ¿Cómo definirías el producto escalar análogo en $W_n := \{p(x) \in \mathbb{C}[x] : \text{grado}(p(x)) \leq n\}$ para un cierto $n \in \mathbb{N}$?

Nota: Salvo normalizaciones, la familia que se obtiene al aplicar el proceso de Gram-Schmidt a $\{1, x, \ldots, x^n\}$, la base natural de V_n, son los *polinomios de Legendre* que se introdujeron inicialmente para cuestiones de gravitación y tienen múltiples aplicaciones en física y matemáticas.

17. Considera la forma bilineal $\psi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\psi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

a) Decide de manera razonada si ψ es un producto escalar.

b) Encuentra una base de $\mathbb{R}^3$ respecto a la que la matriz de ψ sea diagonal.

18. Sea $V = \mathbb{C}^3$ y sea $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base estándar. Sea $\varphi : V \times V \to \mathbb{C}$ la forma sesquilineal cuya matriz asociada respecto a B es:

$$\begin{pmatrix} 1 & -i & i \\ i & 2 & -1 \\ -i & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

a) Demuestra que φ es un producto escalar.

b) Calcula una base ortonormal de V respecto al producto escalar definido por φ.

19. Sean $u_1 = (-2, -1, 1)$, $u_2 = (0, -1, 0)$ y $u_3 = (1, -1, 0)$ vectores de $\mathbb{R}^3$.

a) Demuestra que $B' = \{u_1, u_2, u_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

b) Demuestra que existe un producto escalar ϕ respecto al cual B' es una base ortogonal. Decide de manera razonada si ϕ es único con esta propiedad.

c) Demuestra que existe un producto escalar ψ respecto al cual B' es una base ortonormal. Decide de manera razonada si ψ es único con esta propiedad. Describe la matriz de ψ respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

20. Calcula el complemento ortogonal de la recta

$$L := \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = x_2 = x_3\}$$

respecto al producto escalar

$$\phi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1 y_1 + (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) + (x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3),$$

y respecto al producto escalar usual.

21. En $\mathbb{R}^3$ encuentra un producto escalar para el cual el complemento ortogonal del plano $x = 0$ sea la recta $\{x = y, z = 0\}$. ¿Es único ese producto escalar?