1) Sea $\mathbb{R}_2[x]$ el espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de polinomios reales de grado a lo más 2 en x y el subespacio

$$V = \{a(x+1)^2 + b(x^2+1) \,:\, a, b \in \mathbb{R}\}.$$

a) [1] Sea la forma bilineal $\varphi : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\varphi(P,Q) = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$. Halla su matriz en la base $\{(x+1)^2, x^2+1\}$ y prueba que φ define un producto escalar en V. Nota: También lo define en $\mathbb{R}_2[x]$ pero eso no se pide comprobarlo.

b) [1.5] Con este producto escalar en $\mathbb{R}_2[x]$, halla la proyección ortogonal de x^2 sobre V.

c) [1] Estudia si la aplicación lineal $f : V \longrightarrow V$ que aplica $P(x)$ en $P(-x)$ es ortogonal y si es autoadjunta. Indicación: Lo más fácil es utilizar la definición de φ sin elegir ninguna base particular.

2) [3] Decide para qué valores a y b de los parámetros la siguiente matriz es diagonalizable:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2b & b & 0 \\ 0 & 2a+1 & a+1 & b-2 \\ 0 & -2a-2 & -a-2 & -2b+4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Indicación: El polinomio característico es $(\lambda^2 - 1)(\lambda + 1)(\lambda - a)$.

3) Decide si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas dando, según el caso, una pequeña demostración, un contraejemplo o una explicación.

a) [1] La exponencial de una matriz real es siempre una matriz real pero la exponencial de una matriz compleja no real puede ser real.

b) [1.5] La aplicación $(x,y,z)^t \mapsto \frac{1}{3}(-x+2y+2z, 2x-y+2z, 2x+2y-z)^t$ define una simetría por un plano.

c) [0.5] Siempre es posible diagonalizar una forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ con un cambio de base correspondiente a un giro en $\mathbb{R}^3$. Nota: las simetrías axiales se consideran giros de ángulo π.

d) [0.5] Para cada forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, la cantidad $Q(\vec{v}_1) + Q(\vec{v}_2) + Q(\vec{v}_3)$ es constante para cualesquiera $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ ortonormales con el producto escalar usual de $\mathbb{R}^3$. Indicación: Recuerda que la traza de una matriz es invariante por cambios de base.

Solución

1) Escribimos $P_1 = (x+1)^2$ y $P_2 = x^2 + 1$.

a) Por definición, la matriz es

$$\begin{pmatrix} \varphi(P_1,P_1) & \varphi(P_1,P_2) \\ \varphi(P_2,P_1) & \varphi(P_2,P_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0^2+1^2+4^2 & 0\cdot 2 + 1\cdot 1 + 4\cdot 2 \\ 2\cdot 0 + 1\cdot 1 + 2\cdot 4 & 2^2+1^2+2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 9 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}.$$

Define un producto escalar porque es simétrica y $17 > 0$, $17\cdot 9 - 9^2 > 0$ (criterio de Sylvester).

b) Sea $Q = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$ la proyección buscada, entonces $x^2 - Q \in V^\perp$ o equivalentemente $\varphi(x^2, P_1) = \varphi(Q, P_1)$ y $\varphi(x^2, P_2) = \varphi(Q, P_2)$. Usando $\varphi(x^2, P_1) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 4 = 4$, $\varphi(x^2, P_1) = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 4$ y el apartado anterior para $\varphi(P_i, P_j)$, se obtiene

$$\begin{cases} 4 = 17\lambda_1 + 9\lambda_2 \\ 4 = 9\lambda_1 + 9\lambda_2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \frac{4}{9} \qquad \Rightarrow \qquad Q = \frac{4}{9}(x^2 + 1).$$

c) Se tiene $\varphi(fP, fQ) = \varphi\big(P(-x), Q(-x)\big) = P(1)Q(1) + P(0)Q(0) + P(-1)Q(-1)$ y como esto es lo mismo que $\varphi(P, Q)$, es ortogonal. Por otro lado, $\varphi(P, fQ) = \varphi\big(P, Q(-x)\big) = P(-1)Q(1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(-1)$ que coincide con $\varphi(Q, fP) = \varphi(fP, Q)$ ya que es simétrico en P y Q. Por tanto también es autoadjunta.

2) Sean $M_+ = A + I$ y $M_- = A - I$. Calculemos sus rangos:

$$\operatorname{rg}(M_+) \underset{f_2+f_3\to f_3}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2 & 2b & b & 0 \\ 0 & 2a+2 & a+1 & b-2 \\ 0 & 0 & 0 & 2-b \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 & \text{si } a = -1 \text{ y } b = 2, \\ 3 & \text{si } a \neq -1 \text{ y } b \neq 2, \\ 2 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Recuérdese que el rango es el número de escalones. De la misma forma

$$\operatorname{rg}(M_-) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2b & b & 0 \\ 2a & a+1 & b-2 \\ 2a-2 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ -2 & a+1 & b-2 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{cases} 2 & \text{si } a = 1 \text{ y } b = 0, \\ 3 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

donde se ha usado $2f_2 + f_3 \to f_3$ en la primera igualdad y $c_1 - 2c_2 \to c_1$ en la segunda.

Los ceros del polinomio característico son 1, -1, -1 y a. Para que A sea diagonalizable es necesario y suficiente que en los autovalores múltiples haya tanta dimensión del espacio de autovectores como multiplicidad del autovalor. Distinguimos entonces $a = 1$, $a = -1$ y $a \neq \pm 1$.

Si $a = 1$ debe ser $\dim\ker(M_+) = \dim\ker(M_-) = 2$ pero esto es imposible porque según lo anterior $\operatorname{rg}(M_+) = \operatorname{rg}(M_-) = 2$ no se cumple si $a = 1$. Si $a = -1$ necesitamos $\dim\ker(M_+) = 3$ que equivale a $\operatorname{rg}(M_+) = 1$ y así $b = 2$. Finalmente, si $a \neq \pm 1$ el rango de M_+ debe ser 2, para que $\dim\ker(M_+) = 2$, y por tanto de nuevo $b = 2$.

En definitiva, es diagonalizable si y solo si $a \neq 1$ y $b = 2$.

3) La única falsa es la segunda.

a) V. Si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ entonces $A^k \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ y se sigue que $\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$ es real. Por otro lado, por ejemplo $\exp(2\pi i I) = I$ para I la matriz identidad en cualquier dimensión.

b) F. La traza de esta aplicación es -1 y la de una simetría por un plano es 1, ya que diagonaliza como $\operatorname{diag}(-1, 1, 1)$.

c) V. Sabemos que Q diagonaliza mediante una matriz C ortogonal de cambio de base, así que $|C| = \pm 1$. Si $|C| = 1$ es un giro y si $|C| = -1$ entonces $-C$ es un giro (es ortogonal de determinante 1) y como $(-C)^t A(-C) = C^t AC$, también sirve para diagonalizar.

d) V. Sea A la matriz de Q en la base canónica $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ y C la matriz ortogonal que aplica $\vec{e}_j$ en $\vec{v}_j$, $j = 1, 2, 3$. Se tiene $Q(\vec{v}_1) + Q(\vec{v}_2) + Q(\vec{v}_3) = \sum_{j=1}^{3} \vec{e}_j^{\,t} C^t AC\vec{e}_j = \sum_{j=1}^{3} \vec{e}_j^{\,t} C^{-1} AC\vec{e}_j = \operatorname{Tr}\big(C^{-1}AC\big) = \operatorname{Tr}(A)$, donde el último paso es la invariancia de la traza por cambios de base mencionada en la indicación.

Criterios de corrección y comentarios

1) El subespacio es obviamente de dimensión 2.

a) También se podía comprobar que era producto escalar usando directamente la definición de φ, sin utilizar su matriz. El enunciado ya decía que φ es bilineal, no hacía falta comprobarlo.

b) Un error bastante repetido es proceder como si la base del subespacio V fuera ortogonal u ortonormal y no es ninguna de las dos cosas.

c) Resolver el problema utilizando matrices en cierta base es posible pero nada recomendable. Si se toma la base indicada en a), al no ser ortonormal, que la aplicación sea ortogonal o autoadjunta no equivale a que la matriz verifique $AA^t = I$ o $A = A^t$.

2) Es difícil describir todos los posibles errores. Como regla general, cada caso no considerado descuenta 0.5. Por otro lado es relativamente común dar por hecho que $\lambda = -1$ es siempre doble y que $\lambda = 1$ es siempre simple. De esta forma las dimensiones necesarias para que A sea diagonalizable se vuelven constantes. Este es un error grave, justamente el problema consiste en ver cómo cambian las dimensiones requeridas cuando los autovalores cambian de multiplicidad. Los que han procedido así tienen a lo más 1.5. Algunos os tenéis que repasar cómo hallar rangos (Álgebra I).

3) No puntúa nada acertar verdadero o falso si la explicación no es coherente.

a) Cada parte cuenta la mitad. Por ejemplo, los que solo justificáis que A real implica $\exp(A)$ real tenéis 0.5. Los que den una idea intuitiva de por qué puede existir $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C}) - \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ con $\exp(A) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ pero no acierten con el contraejemplo, añaden 0.25. Los que hagan la primera parte solo para matrices reales diagonales, tienen 0.25 en ella.

b) También se podía aducir que el determinante es 1 y por tanto no puede ser una simetría por un plano. No añade nada decidir qué movimiento es ni descuenta no hacerlo.

c) Un error común aquí es suponer que los giros siempre están en su forma canónica.

d) Esta es una pregunta "para nota". Solo he valorado que esté bien completamente salvo que he puesto 0.25 a quienes lo resuelven para formas diagonales. No es verdad en general $\operatorname{Tr}(C^t AC) = \operatorname{Tr}(A)$, es decir, la traza de la matriz de una forma cuadrática no es invariante cuando se hacen cambios generales. Tampoco es verdad que en cualquier base ortonormal se diagonalize una forma cuadrática.

Una forma más elemental de proceder, sin trazas, es escribir en la base canónica $\vec{v}_k = (v_{k1}, v_{k2}, v_{k3})$. Si A es la matriz de Q en la base canónica, $Q(\vec{v}_1) + Q(\vec{v}_2) + Q(\vec{v}_3) = \sum_{k=1}^{3} \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} v_{ki} v_{kj} = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} \sum_{k=1}^{3} v_{ki} v_{kj}$. Por la ortonormalidad, la suma interior es 1 si $i = j$ y cero si $i \neq j$. De esta forma el resultado es siempre $a_{11} + a_{22} + a_{33}$.