Nombre y apellidos ....

....

DNI ....

---

1) [2] Halla el complemento ortogonal del subespacio W de $\mathbb{R}^3$ de ecuación $x - y + z = 0$ con el producto escalar dado por

$$\phi((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = (x_1, y_1, z_1) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

indicando una base de $W^{\perp}$.

2) [2] Hallar la forma canónica de Jordan de la aplicación de derivación D en el espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de polinomios con coeficientes reales en x de grado a lo más 3. Obtener una base en la que la matriz de D tenga dicha forma canónica.

3) En el espacio de matrices cuadradas $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ consideramos la forma bilineal $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^t B)$.

(a) [1] Demuestra que se trata de un producto escalar. Así $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ queda convertido en un espacio euclídeo.

(b) [1] Calcula la signatura de la forma cuadrática en $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ dada por $Q(A) = \det(A)$.

4) Decide si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas dando, según el caso, una pequeña demostración, un contraejemplo o una explicación.

(a) [0.75] En el espacio vectorial (real) euclídeo E, los vectores $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$ son ortogonales si y sólo si $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$.

(b) [0.75] Sean $\vec{u}_1 = (5, 0, 0)$, $\vec{u}_2 = (1, 5, 0)$ y $\vec{u}_3 = (1, 1, 5)$ vectores en $\mathbb{R}^3$. Entonces, existe un producto escalar $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ respecto al que los tres vectores son ortogonales entre sí y $\|\vec{u}_1\|_\phi = 5$, $\|\vec{u}_2\|_\phi = 2$ y $\|\vec{u}_3\|_\phi = 1$.

(c) [0.5] Existen aplicaciones lineales inyectivas en el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^3$ (con respecto a cierto producto escalar Φ) tales que su aplicación adjunta NO es sobreyectiva.

5) [2] En $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual, identifica la aplicación ortogonal $A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & 0 & -4/5 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4/5 & 0 & -3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

indicando sus elementos principales.

Nota: Las cantidades entre corchetes son las puntuaciones de cada apartado.