Nombre y apellidos ....

....

DNI ....

---

1) Sea $\mathbb{R}_2[x]$ el espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de polinomios reales de grado a lo más 2 en x y el subespacio

$$V = \{a(x+1)^2 + b(x^2+1) \,:\, a,b \in \mathbb{R}\}.$$

a) [1] Sea la forma bilineal $\varphi : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\varphi(P,Q) = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$. Halla su matriz en la base $\{(x+1)^2, x^2+1\}$ y prueba que φ define un producto escalar en V. Nota: También lo define en $\mathbb{R}_2[x]$ pero eso no se pide comprobarlo.

b) [1.5] Con este producto escalar en $\mathbb{R}_2[x]$, halla la proyección ortogonal de x^2 sobre V.

c) [1] Estudia si la aplicación lineal $f : V \longrightarrow V$ que aplica $P(x)$ en $P(-x)$ es ortogonal y si es autoadjunta. Indicación: Lo más fácil es utilizar la definición de φ sin elegir ninguna base particular.

2) [3] Decide para qué valores a y b de los parámetros la siguiente matriz es diagonalizable:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2b & b & 0 \\ 0 & 2a+1 & a+1 & b-2 \\ 0 & -2a-2 & -a-2 & -2b+4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Indicación: El polinomio característico es $(\lambda^2-1)(\lambda+1)(\lambda-a)$.

3) Decide si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas dando, según el caso, una pequeña demostración, un contraejemplo o una explicación.

a) [1] La exponencial de una matriz real es siempre una matriz real pero la exponencial de una matriz compleja no real puede ser real.

b) [1.5] La aplicación $(x,y,z)^t \mapsto \frac{1}{3}(-x+2y+2z, 2x-y+2z, 2x+2y-z)^t$ define una simetría por un plano.

c) [0.5] Siempre es posible diagonalizar una forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ con un cambio de base correspondiente a un giro en $\mathbb{R}^3$. Nota: las simetrías axiales se consideran giros de ángulo π.

d) [0.5] Para cada forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, la cantidad $Q(\vec{v}_1) + Q(\vec{v}_2) + Q(\vec{v}_3)$ es constante para cualesquiera $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ ortonormales con el producto escalar usual de $\mathbb{R}^3$. Indicación: Recuerda que la traza de una matriz es invariante por cambios de base.

Nota: Las cantidades entre corchetes son las puntuaciones de cada apartado.