Simetrías I

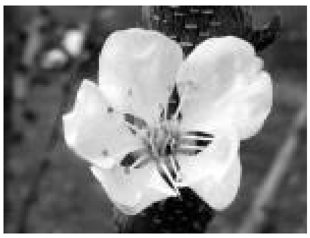
Estímulo del Talento Matemático

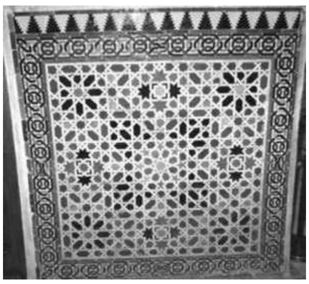
Real Academia de Ciencias

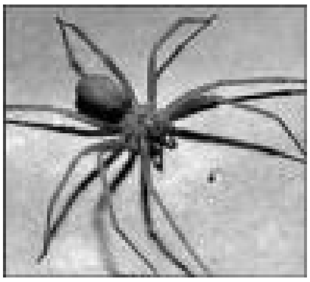
11 de febrero de 2006

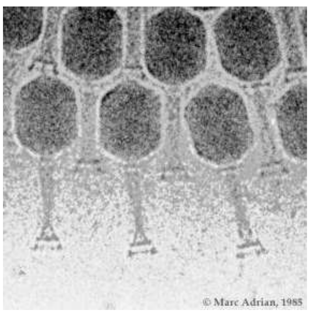
1. Simetría. . . ¿eres tú?

La *simetría* es uno de esos conceptos que resultan más fáciles de intuir que de definir con rigor. Todos conocemos numerosas formas naturales o artificiales que poseen atractivas simetrías. Un cristal, un virus, el ADN, una galaxia, el cuerpo de muchos animales, multitud de flores, las pirámides de Egipto o las mayas, el Partenón, un mosaico árabe, una vidriera gótica, etc.



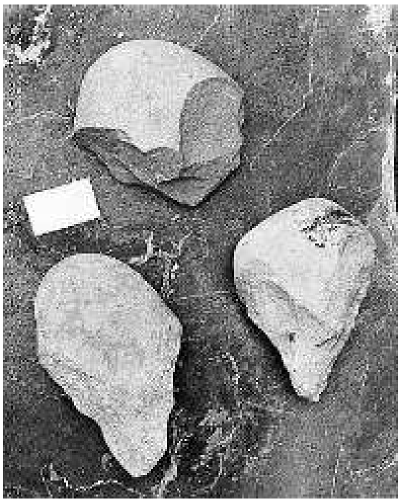




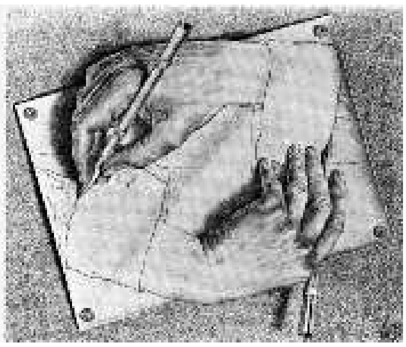


La palabra simetría suele utilizarse para describir objetos proporcionados, equilibrados. Alude también a cierto tipo de armonía entre las partes que integran un todo.

Desde siempre, la simetría ha interesado al hombre. Las herramientas humanas más primitivas tienen un aspecto sospechosamente simétrico.



Tanto los artistas como los científicos "utilizan" la simetría.

De hecho, hoy resulta fundamental para comprender el universo. Los físicos teóricos han llegado incluso al concepto de *supersimetría* tratando de buscar una teoría unificadora que explique el mundo.

Matemáticamente, la palabra simetría tiene un significado más preciso: una simetría de un objeto es una *transformación* que deja su aspecto aparentemente igual.

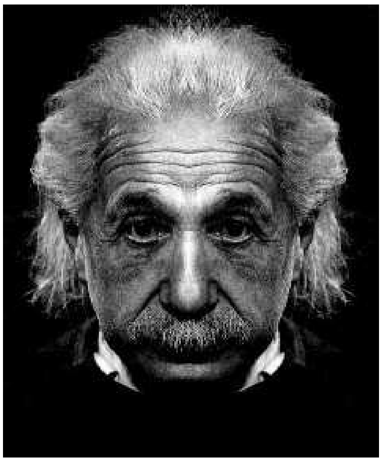
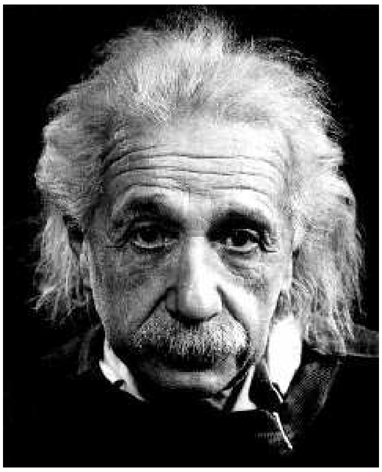
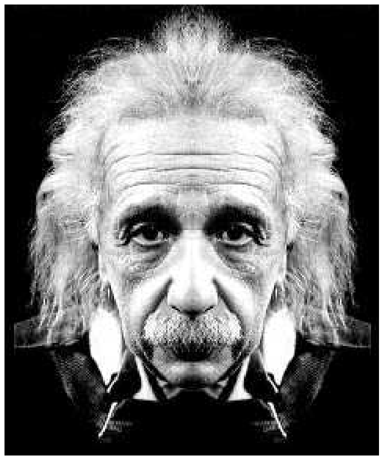
Por ejemplo, dibuja una mariposa.

Todos diríamos que su lado izquierdo y su lado derecho son iguales. ¿Lo son en realidad? Traza una línea recta vertical que la cruce de arriba a abajo por la mitad y dobla el papel por ella: las dos mitades de la mariposa coinciden.

Copia la mariposa en papel semi-transparente. Ahora mueve el papel, dándole la vuelta sobre el eje que has pintado. Cada punto de un lado se mueve al lugar correspondiente al punto del otro lado. Los puntos se han "movido", pero la mariposa sigue teniendo el mismo aspecto que antes.

En lenguaje matemático, lo que has hecho es aplicar una *transformación*, la reflexión respecto a la recta vertical, que deja *invariante* (no cambia) a la mariposa. Decimos entonces que la mariposa posee *simetría bilateral* y que la recta vertical es su eje de simetría.

Nuestro rostro también posee simetría bilateral. Más o menos. . . la simetría en el mundo biológico es sólo aproximada y nuestros cuerpos no son una excepción. Observa la cara real de Einstein en la imagen del centro y compara con las caras de los lados, obtenidas tomando una de las mitades y reflejándola respecto al eje de simetría vertical.

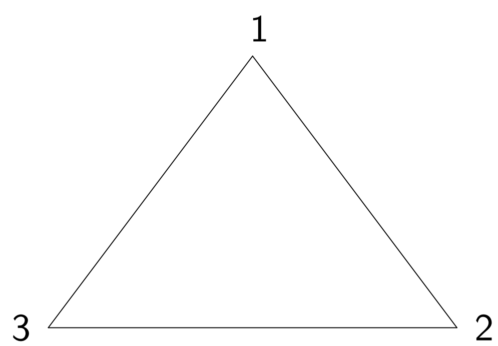
¿Qué otros objetos -naturales y artificiales- conoces con este tipo de simetría? En cada caso, ¿cuál es el eje de simetría?

2. Mundo plano

La mayor parte de las transformaciones simétricas pueden verse como *movimientos* rígidos que cambian la posición de los puntos conservando las distancias entre ellos. Dibujando la figura en papel semi-transparente, buscamos las posibles maneras de mover el papel para que la figura coincida con la original.

En un plano, la reflexión respecto a una recta -de la que hemos hablado antes- es uno de estos movimientos. ¿Puedes encontrar los ejes de simetría de un triángulo equilátero?

Un giro alrededor de un punto con cualquier ángulo es otro movimiento del plano. Por ejemplo, un triángulo equilátero no cambia si giramos 120º alrededor de su centro ¿y si giramos 90º?, ¿qué ha pasado con su orientación? Prueba a girar 240º en torno al centro. ¿Hay más giros que dejen el triángulo *invariante*?

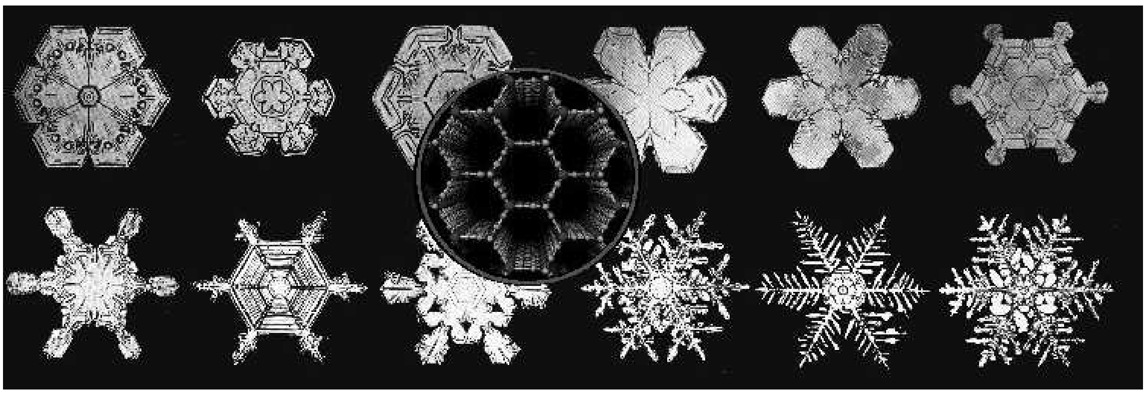


Rellena la tabla poniendo a dónde va cada vértice del triángulo dependiendo del movimiento considerado:

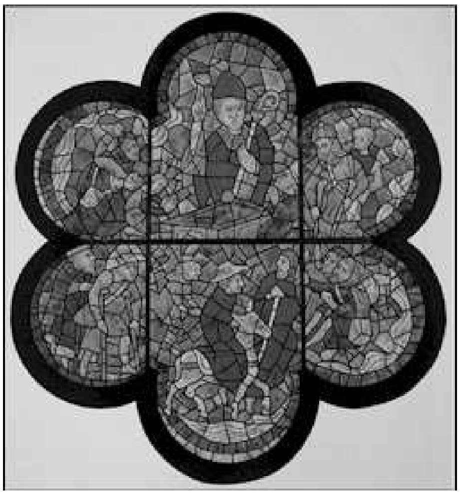
Reflexión respecto recta por 1	Reflexión respecto recta por 2	Reflexión respecto recta por 3	Rotación de 120º	Rotación de 240º	No hacer nada
$1 \rightarrow$ $2 \rightarrow$ $3 \rightarrow$	$1 \rightarrow$ $2 \rightarrow$ $3 \rightarrow$	$1 \rightarrow$ $2 \rightarrow$ $3 \rightarrow$	$1 \rightarrow$ $2 \rightarrow$ $3 \rightarrow$	$1 \rightarrow$ $2 \rightarrow$ $3 \rightarrow$	$1 \rightarrow$ $2 \rightarrow$ $3 \rightarrow$

¿Qué ocurriría si mezclamos giros con reflexiones? Elige al azar una pareja entre las transformaciones anteriores y aplícalas al triángulo, una detrás de la otra ¿Qué sucede?

Podemos pensar que a la mariposa le da igual tener simetría bilateral o cualquier otra; pero, por ejemplo, los cristales -como los de los copos de nieve, los de sal, los de cuarzo o las esmeraldas- se clasifican según las simetrías que poseen y de hecho, éstas determinan sus propiedades.

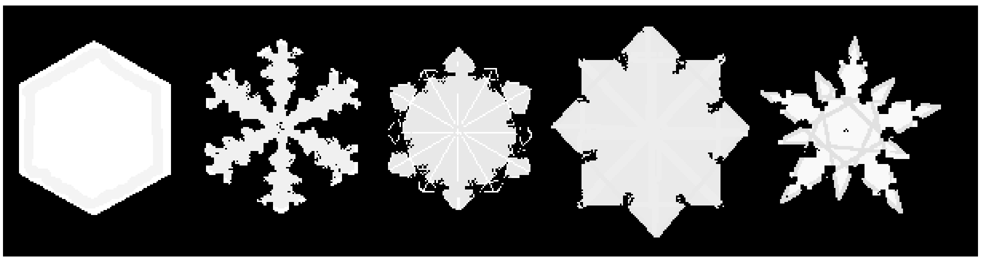


Todos los cristales de nieve poseen las mismas simetrías. Exactamente iguales que el siguiente rosetón, como los que puedes ver en muchas iglesias.



Cuenta cuántas reflexiones respecto de una recta y cuántas rotaciones lo dejan invariante.

En la siguiente imagen aparecen 5 posibles copos de nieve, pero sólo 3 de ellos tienen la simetría característica de los cristales de nieve. ¿Sabrías distinguir a los impostores?

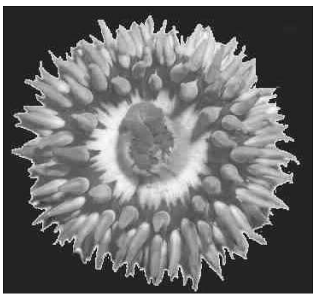


¿Qué polígono regular posee las mismas simetrías que los copos de nieve?

Después de tanta nieve, para entrar en calor, encuentra para cada una de las letras de la palabra CALOR las simetrías que poseen (las transformaciones que las dejan tal cual). ¿Te atreves con todo el alfabeto?

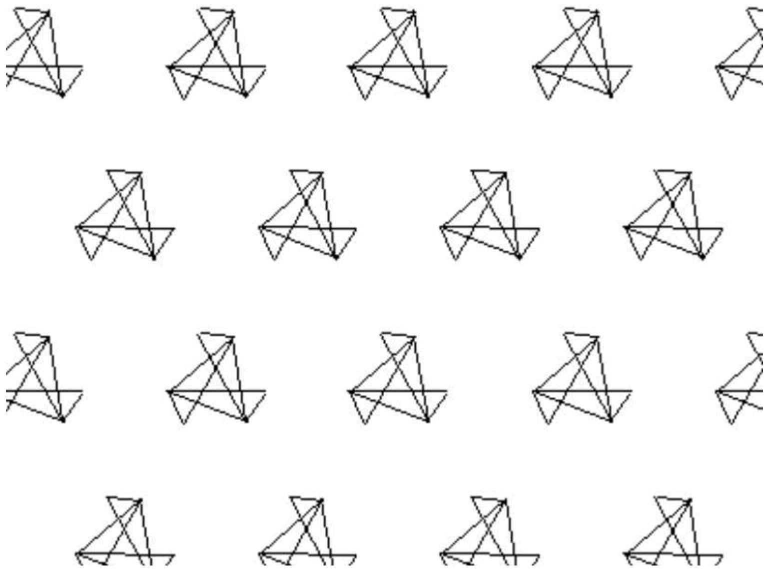
Haz lo mismo con las siguientes siluetas (corresponden a una serie de flores y animales).



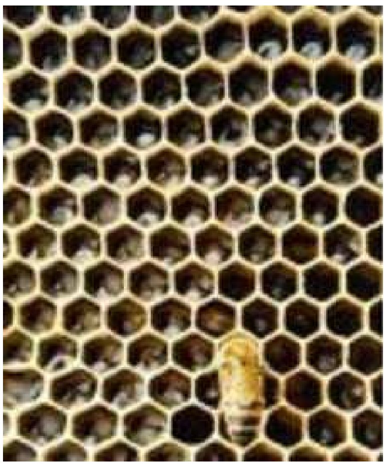
Una traslación es un movimiento del plano que mueve todos los puntos del plano en una dirección fija y una distancia dada. Se representa con una flecha (vector de traslación) que indica la dirección y distancia de la traslación.

También existen figuras que son invariantes por traslaciones en direcciones distintas. ¿Puedes encontrar todas las traslaciones que son simetrías del siguiente dibujo?



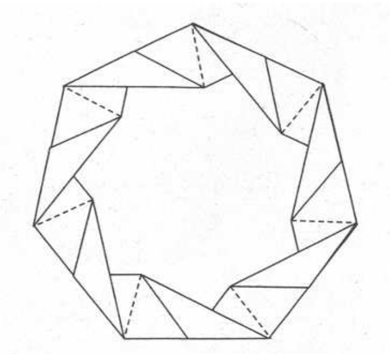
Además de traslaciones, el dibujo anterior posee otro tipo de simetrías. ¿De qué tipo/s?

Encuentra las simetrías de las siguientes figuras (se corresponden con un panal y con un enlosetado de un suelo)



Una vez entrenado/a, ¿podrías encontrar la lista de todos los movimientos posibles de un plano? (recuerda los que ya conoces: reflexión respecto a recta, rotación alrededor de un punto y traslación). Piensa en la figura que van dejando tus huellas cuando caminas sobre la arena ... ¿Has encontrado el movimiento que las dejaría *invariantes*?

Ahora que tenemos una lista donde buscar, ¿qué simetrías posee una estrella de mar? ¿Y el sofisticado polígono de 7 lados de la figura? ¿Cuál de ellos posee mayor número de simetrías?



Ahora investiga y dibuja los ejes de simetría de los polígonos regulares con 3, 4,. . . , 8 y 9 lados y también de un círculo. Cuenta sus ejes de simetría distinguiendo los que van de vértice a vértice, de lado a lado y de vértice a lado. ¿Qué observas en general para polígonos de n lados? ¿Qué cambia según el número de lados sea par o impar? ¿Qué dirías en el caso del círculo?