Pompas de jabón

Estímulo del Talento Matemático

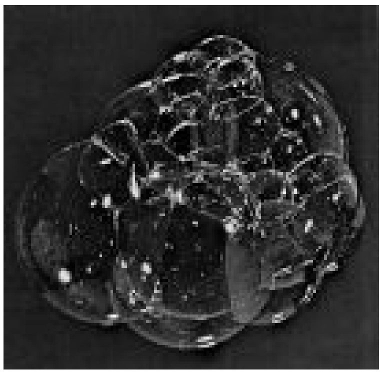
Real Academia de Ciencias

1 de abril de 2006

1. Pompas de jabón

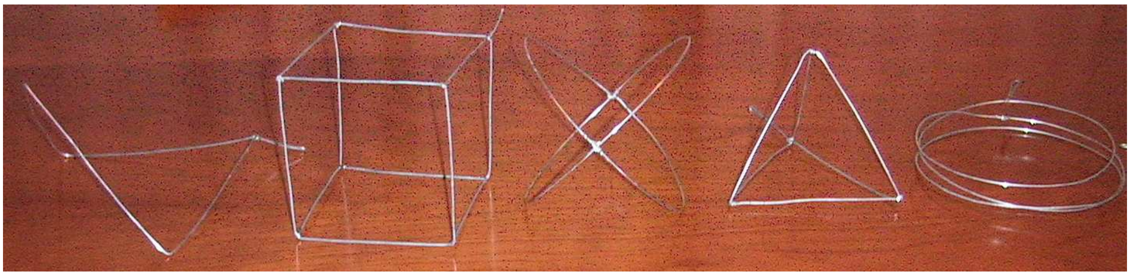
¿Qué formas puede adquirir una película de agua jabonosa? Es éste un problema interesante (y muy difícil) que ha atraído a muchos matemáticos (y no matemáticos), y que ha dado lugar a toda una disciplina de la geometría conocida con el nombre de **superficies minimales**.

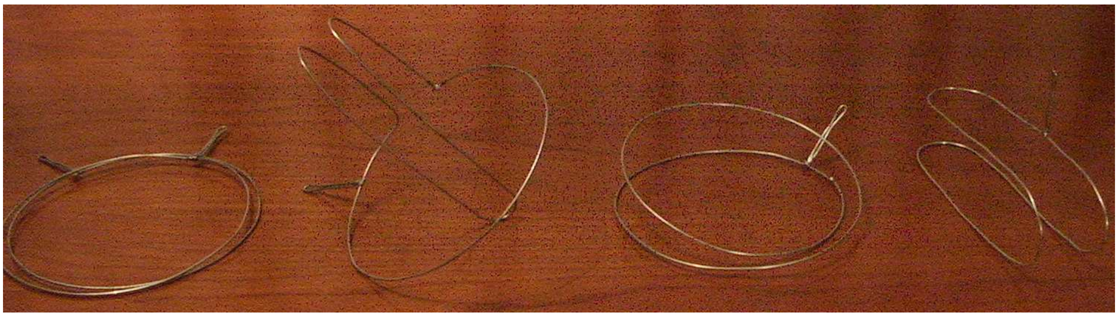
Hay dos tipos de superficies que pueden formarse con jabón: las *pompas*, que son las que no encierran aire dentro, y las *burbujas*, que encierran aire en su interior. Las siguientes son típicas fotografías de burbujas. Nosotros nos centraremos en el caso de las pompas.



Empezamos preparando todo el material: tomamos un barreño de agua donde echamos 5 cucharadas soperas de Fairy y 7 cucharadas soperas de glicerina por cada litro de agua. Movemos la mezcla, pero sin agitar para evitar que salga espuma (nuestra gran enemiga). El jabón disminuye la tensión superficial del agua, evitando que se rompan las pompas. La glicerina evita la evaporación del agua, lo que va a hacer a nuestras pompas resistentes, para que duren el tiempo suficiente para poderlas ver, jugar con ellas, fotografiar . . .

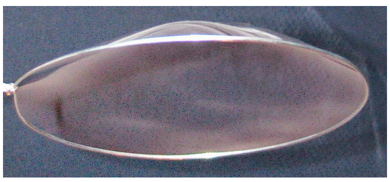
(la glicerina es un veneno, por lo que debe ser manipulada por un adulto). También necesitamos una buena colección de alambres preparados para tener bonitos diseños de pompas.





Obtendremos diversos tipos de pompas usando los alambres, que actuarán como soporte. Al introducir un alambre en el agua jabonosa y extraerlo con cuidado, obtenemos una superficie que se agarra al alambre (se dice que el alambre es el borde de la superficie). Si nos han salido burbujas adheridas a la pompa, podemos pincharlas con un alfiler para eliminarlas.

¿Qué propiedad comparten las pompas? Si introducimos un alambre con forma de circunferencia, ¿qué pompa obtendremos? Mira a estas dos fotos y señala la respuesta correcta.

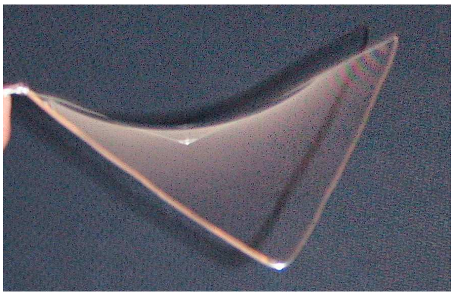


Ciertamente es la pompa de la izquierda: un círculo. ¿Por qué no puede ser la de la derecha? Porque tiene un área mayor. La película jabonosa, por la fuerza de cohesión interna de las moléculas que la forman, tiende a tener el área mínima posible. Es decir, si sus moléculas se pueden acercar más las unas a las otras haciendo disminuir el área, lo harán. Enunciamos esto como un "principio universal".

Propiedad 1: Una pompa tiene la menor área posible.

Éste es el motivo por el que a las superficies que obtenemos como pompas de jabón se las ha dado el nombre de **superficies minimales**.

Si usamos alambre que no sea plano, también obtenemos superficies de área mínima, pero ahora son superficies curvadas.

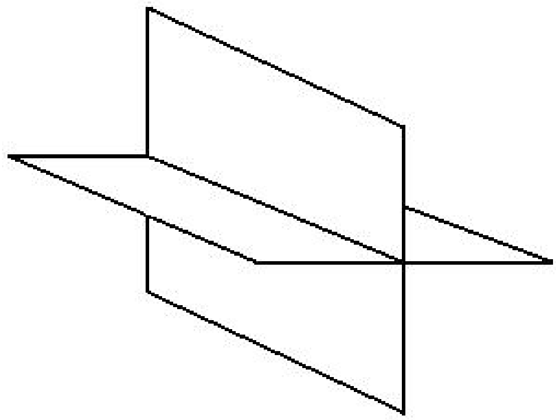




2. El problema de Plateau

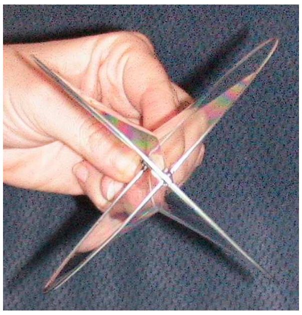
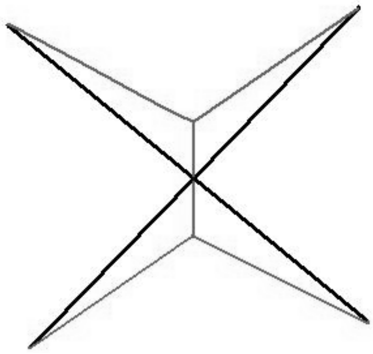
Joseph Plateau fue un profesor belga de física que vivió en el siglo XIX (1801–1883) y que se dedicó a estudiar en detalle las propiedades de las pompas de jabón, por lo que al problema de encontrar qué pompa de jabón tiene por borde una curva dada se le conoce con el nombre de *problema de Plateau*. Plateau se quedó ciego a los 42 años, según se cree por haber mirado al sol durante 25 segundos a los 27 años de edad, cuando hacía estudios de fisiología óptica. De hecho sus estudios permitieron conseguir la sensación de movimiento durante la proyección de una película a partir de imágenes fijas (fotogramas). Después de quedarse ciego, llevó a cabo su estudio de las pompas de jabón. Diseñaba los alambres y, con la colaboración de su mujer e hijos, que le explicaban las formas de las pompas obtenidas, llegó a conclusiones experimentales que dejó recogidas en una famosa monografía sobre el tema.

La resolución matemática del problema tardó mucho tiempo en llegar y no fue hasta mediados de los años 70 (casi siglo y medio después) que las tesis de Plateau fueron demostradas.

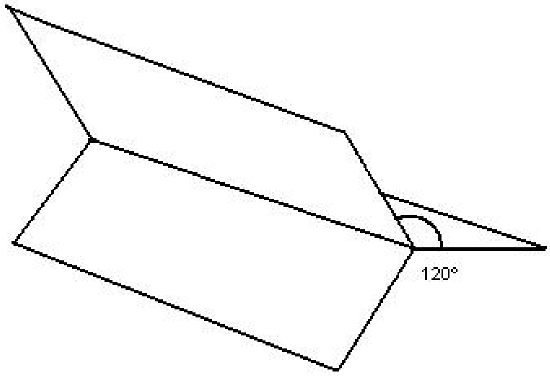
Vamos a revisar las conclusiones a las que llegó Plateau. La primera pregunta que nos hacemos es: ¿qué ocurre cuando dos láminas jabonosas se encuentran?, ¿se pueden cortar perpendicularmente, como en la figura?



Para ello preparamos dos circunferencias perpendiculares, que introducimos en el agua jabonosa. Lo que obtenemos no es lo esperado: mirándolo transversalmente, vemos que no aparecen dos láminas de jabón planas que se cortan. De hecho, se ha formado una especie de ojiva central, y hay cuatro superficies que unen la ojiva con las cuatro semicircunferencias de alambre.

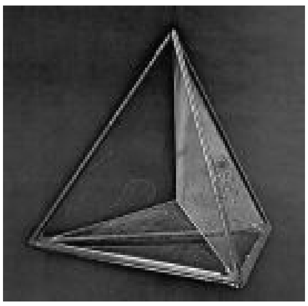
¿Por qué ocurre esto? De hecho, es imposible que cuatro láminas de jabón se encuentren formando ángulos de 90^o. A lo más se pueden encontrar tres láminas de la siguiente forma:

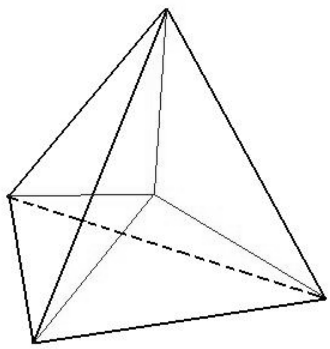


Propiedad 2: Si varias láminas de jabón se cortan, lo hacen de tres en tres y formando ángulos de 120^o.

A este tipo de ángulos que forman varios planos en el espacio se les denomina *ángulos diedros*.

Plateau también descubrió qué ocurre cuando varias láminas de jabón se encuentran en un punto.

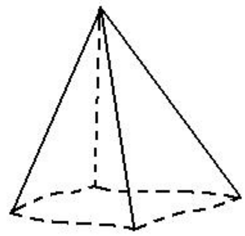




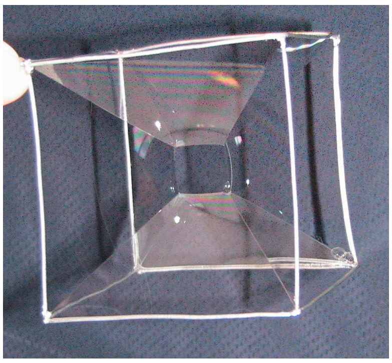
Propiedad 3: Si varias láminas de jabón se encuentran en un punto, lo hacen de seis en seis y formando ángulos "triedros" iguales.

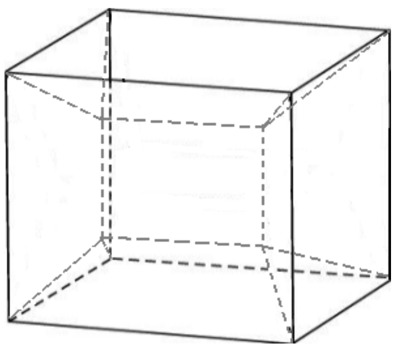
Los *ángulos triedros* son los ángulos tridimensionales, y se entienden como los formados en el vértice de un prisma (regular o irregular).

Los ángulos triedros no se pueden medir con un número, tal como se hace para los ángulos planos. El siguiente es un dibujo de un ángulo triedro.



La siguiente pompa se obtiene con la estructura de un cubo. ¿Puedes comprobar las dos propiedades anteriores? ¿A lo largo de cuántas aristas se encuentran tres láminas de jabón? ¿En cuántos puntos se encuentran seis láminas?

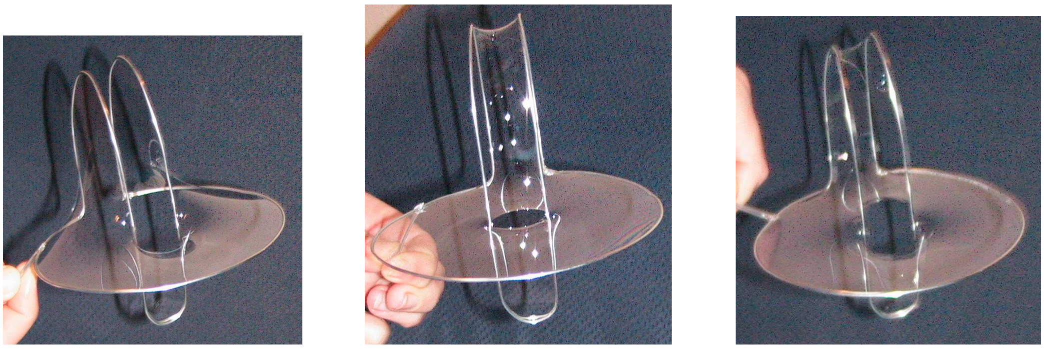




A las líneas donde tres láminas de jabón se encuentran y a los puntos donde se encuentran seis, se les denomina singularidades, porque son los sitios donde la superficie jabonosa forma ángulos. Una superficie es lisa si no tiene estas singularidades. Un teorema matemático de principios de los 70 demuestra que cualquier alambre puede tener una pompa que es lisa.

La manera de obtener pompas lisas a partir de pompas con singularidades consiste en eliminar partes de la misma pinchándolas con un alfiler.

La siguiente figura da un ejemplo interesante del fenómeno citado. El mismo alambre puede soportar distintas pompas. La primera es una pompa lisa que no conecta los dos alambres paralelos (aunque éstos están muy cercanos). En la segunda, vemos otra pompa que conecta dichos alambres, pero el corte con la parte circular horizontal de la pompa produce una ojiva y por tanto una singularidad. Pinchando dicha ojiva, obtenemos la tercera pompa, que es lisa.

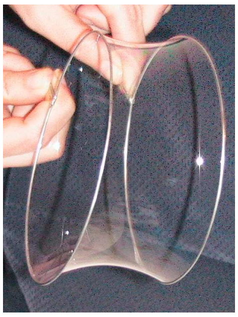
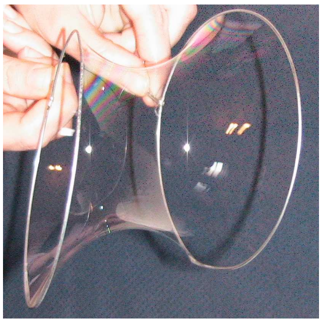


La tercera pompa tiene menor área que la primera. ¿Por qué entonces existe la primera pompa, si no es la de menor área posible?

Tenemos que corregir ligeramente la Propiedad 1 que hemos enunciado anteriormente.

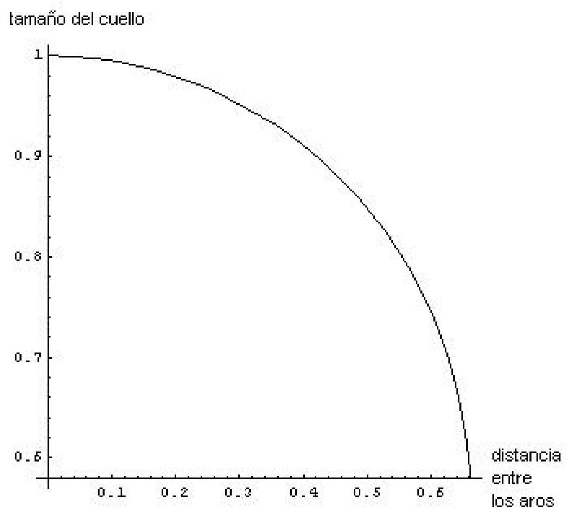
3. Las pompas cambian de forma

Introducimos dos alambres con forma de circunferencia en el barreño de agua jabonosa. Al sacarlos manteniéndolos paralelos y muy cercanos, nos aparece una superficie con forma de cilindro (que es la de área mínima). Si las empezamos a alejar, la superficie se estrecha por el centro. A esta superficie se la conoce con el nombre de *catenoide*. Si seguimos alejándolas, llega un momento en el que el cuello se contrae tanto que las pompas se separan y acabamos con dos aros con sendas pompas circulares.

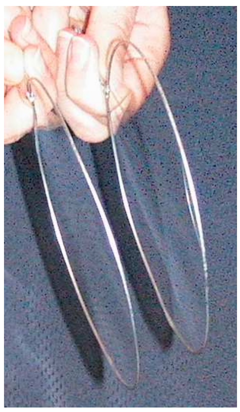





El nombre de catenoide se debe a que las secciones meridionales (es decir, los cortes con planos perpendiculares a los aros y por el centro de los mismos) son *catenarias*. La catenaria es la forma que adquiere un cable suspendido en el aire sujeto por sus dos extremos. Es por esto que a los cables electrificados de las vías ferreas se les denomina catenarias.

Curiosamente, el cuello no se puede estrechar todo lo que queramos. Si el diámetro de los aros es de 10 cm, entonces la máxima separación permitida para los aros es de $6'3$ cm, momento en el que el cuello tiene un diámetro de $5'8$ cm. Una vez pasada esa barrera, la pompa se rompe. El siguiente gráfico indica la relación entre la separación de los aros y la anchura del cuello.



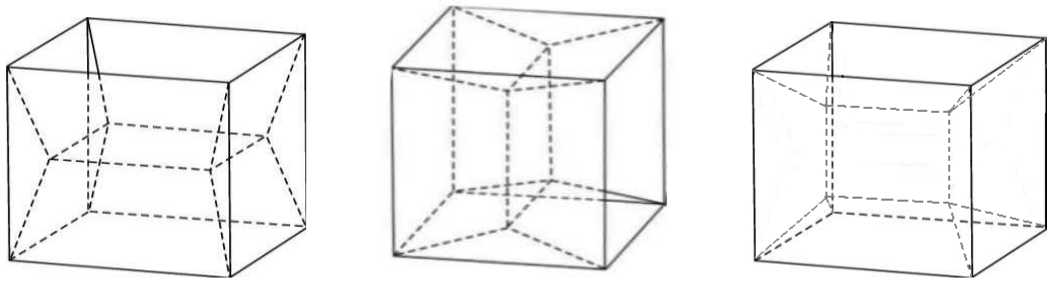
Ha ocurrido un cambio en la forma de la pompa de jabón, que ha pasado de ser de un solo trozo a tener dos. De hecho, tenemos dos pompas de jabón diferentes soportadas en los mismos dos aros colocados de la misma manera en el espacio:



La pompa de la izquierda tiene menor área que la de la derecha. La Propiedad1 debe ser reescrita. Que una pompa de jabón tenga área mínima quiere decir que la superficie no tiene forma de “evolucionar” disminuyendo su área. Pero puede haber otras superficies de área menor que se obtengan por un cambio más drástico, por ejemplo por una rotura de la pompa.

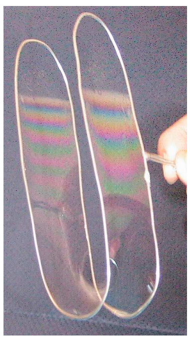
Propiedad 1': Una pompa tiene área menor que cualquier otra superficie "cercana" a ella.

Veamos más ejemplos. El alambre en forma de cubo admite las siguientes tres pompas de jabón:

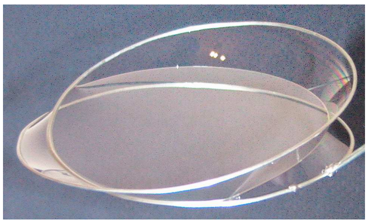


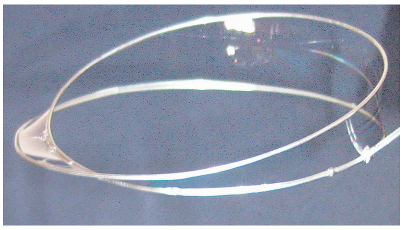
Se puede pasar de una a otra soplando levemente por una de las caras. La energía que aportamos con el soplido permite a la pompa pasar de una configuración estable (de mínima energía) a otra distinta. En el proceso intermedio, la superficie pierde la propiedad de minimalidad.

¿Cuántas pompas crees que admite el siguiente alambre?



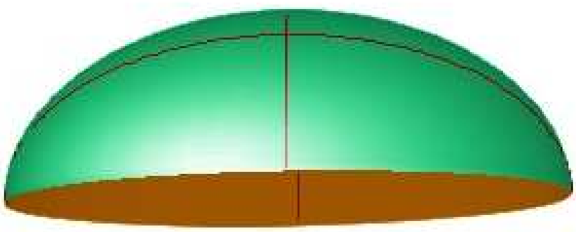
Otra manera de cambiar la forma de una pompa consiste en pinchar parte de la pompa con un alfiler. Con este proceso se pueden conseguir pompas lisas a partir de pompas con singularidades.





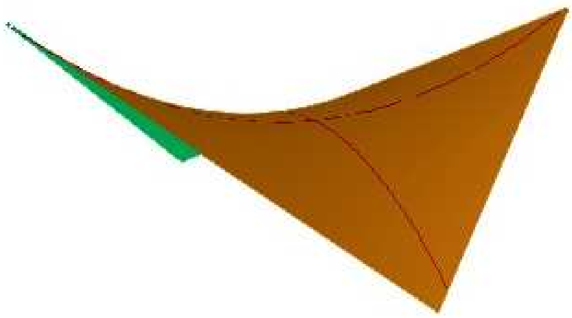
4. Curvatura media

En cualquier punto de una superficie, hay dos direcciones caracterizadas por ser las dos direcciones de máximo empuje. Las dos curvas (dibujadas sobre la superficie) en esas direcciones, llamadas *curvas principales*, marcan lo máximo que nos podemos curvar hacia un lado o hacia el otro en la superficie. Las curvas principales se cortan perpendicularmente. Cuánto más curvada está una curva principal, mayor empuje hay en esa dirección. Esto se mide con dos números, llamados *curvaturas principales*, k_1, k_2.



Supongamos ahora que la superficie es una película jabonosa, caracterizada por la existencia de una tensión superficial (una elasticidad que obliga a la pompa a evolucionar para disminuir su área). Si las curvas principales empujaran en la misma dirección (las curvaturas principales tienen el mismo signo), entonces la superficie disminuye su área moviéndose en esa dirección.

Esto no puede ocurrir en una pompa de jabón. Por tanto, las curvas principales deben "tirar" en direcciones opuestas, y con la misma intensidad (las curvaturas principales son iguales pero de signos opuestos), $k_1 = -k_2$.



Podemos reescribir la Propiedad 1' en términos matemáticos como

Propiedad 1": La suma de las curvaturas principales es cero.

Los matemáticos usan el término *curvatura media*, y lo denotan con la letra H, para referise a la media de las curvaturas principales. Una superficie es minimal si

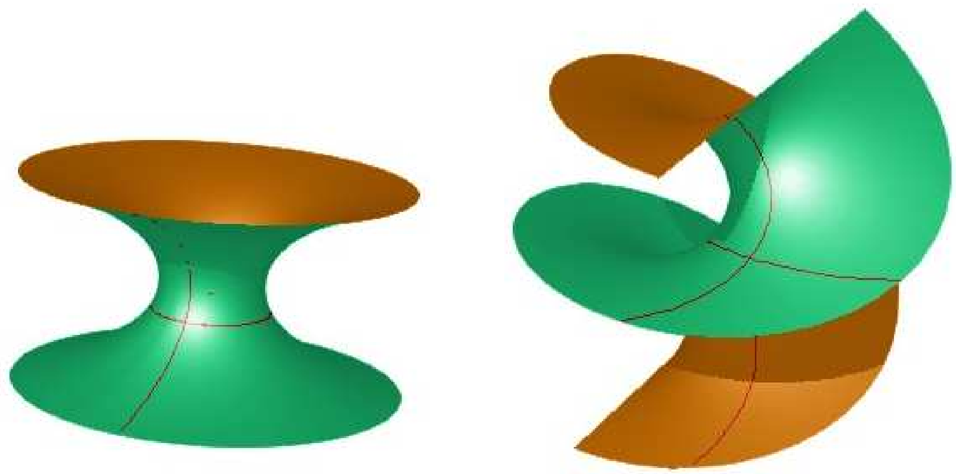
$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} = 0.$$

Esta propiedad permite encontrar las ecuaciones que debe verificar una superficie minimal. Éstas fueron dadas en primer lugar por Lagrange hacia mediados del siglo XVIII. Durante el siglo XIX numerosos matemáticos dedicaron sus esfuerzos a encontrar ejemplos de superficies minimales. En los años 30, se demostró la existencia de superficies verificando la ecuación $H = 0$ para cualquier alambre, pero las soluciones solían tener singularidades y estas singularidades no verificaban las Propiedades 2 y 3 de Plateau.

Hay programas matemáticos, como el de Ángel Montesinos, profesor de la Universidad de Valencia, y descargable en

ftp://topologia.geomet.uv.es/pub/montesin/Superficies_W32/Superficies_Es.zip que permiten dibujar superficies, mirar sus curvas principales y su curvatura media, y así ver si son superficies minimales.

Las siguientes superficies son minimales. La primera es el catenoide, que hemos obtenido con las pompas de jabón anteriormente. La segunda se llama helicoide porque su borde exterior es una hélice. Fueron encontradas en 1776-1785. Durante más de 200 años se creyó que las únicas superficies minimales sin autointersecciones y que se prolongan infinitamente eran el plano, el catenoide y el helicode. En las últimas décadas se han encontrado multitud de ejemplos de superficies minimales con estas dos propiedades.



Muchas más superficies minimales se pueden encontrar en

http://vmm.math.uci.edu/3D-XplorMath/Surface/gallery_m.html

5. Burbujas

Las burbujas son superficies jabonosas que contienen aire en su interior. Se caracterizan por la siguiente propiedad.

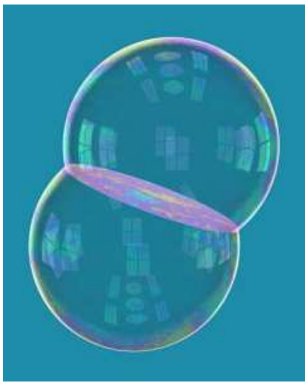
Propiedad B: La pompa tiene el mínimo área que engloba un volumen de aire fijo.

El aire encerrado ejerce una fuerza uniforme (es decir, igual por todas partes) de dentro hacia afuera, que debe ser contrarrestado con la tensión superficial de la pompa (que empujará de fuera hacia dentro). Por tanto, las curvaturas principales deben apuntar ambas en la misma dirección (hacia adentro). Podemos reescribir la propiedad anterior como

Propiedad B': $H =$ constante.

La esfera es una burbuja.

Cuando tenemos dos cantidades de aire englobadas por burbujas, las superficies obtenidas pueden tener formas más interesantes.



El problema de las formas que pueden tener dos burbujas de jabón se ha resuelto en el 2000 por un equipo hispano-norteamericano. El problema de las tres burbujas está aún sin resolver.

También podemos pensar en una pompa pegada a una superficie (pared, esquina, etc). ¿Te atreves a formular algunas propiedades de las burbujas similares a las Propiedades 2 y 3 de las pompas?