

# **Cara y cruz**

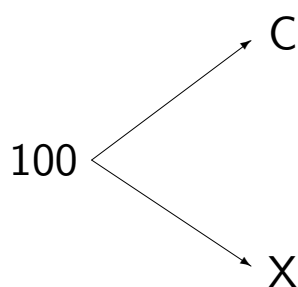
**Estímulo del Talento Matemático**

**Real Academia de Ciencias**

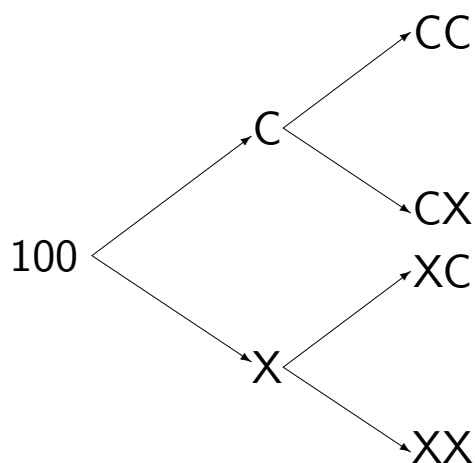
11 de marzo de 2006

## Moneda equilibrada

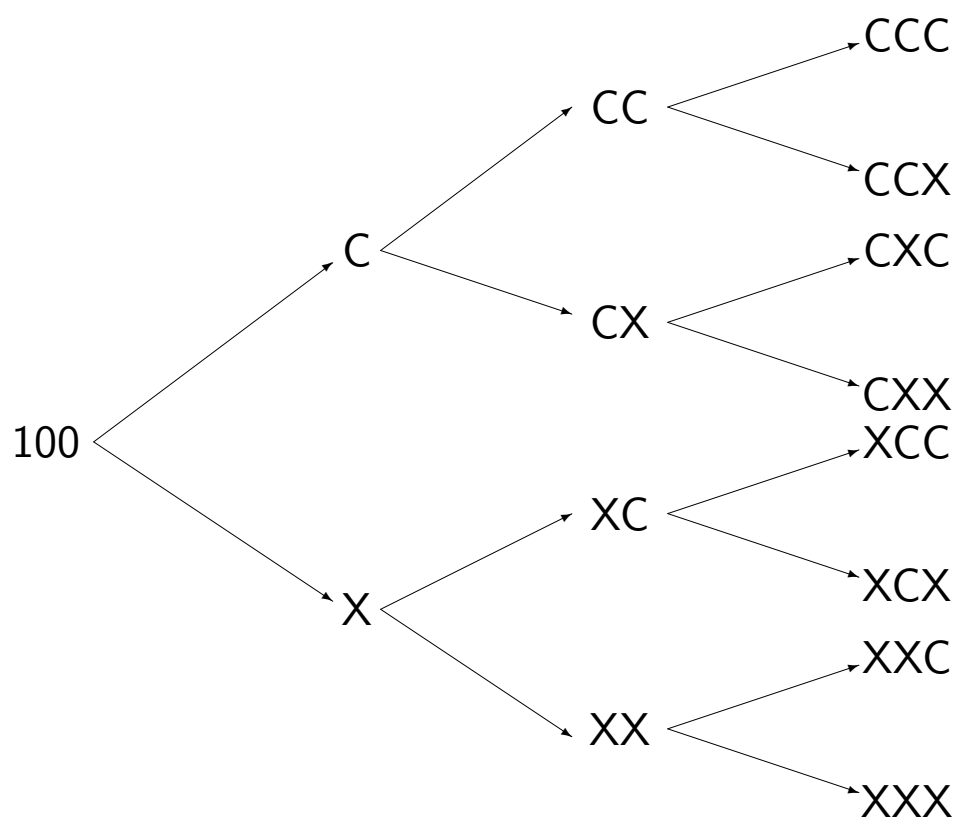
1. Lanzamos una moneda 100 veces:  
esperamos . . . caras y . . . cruces (más o menos).



2. Lanzamos 2 monedas (distintas) sucesivamente, 100 veces  
esperamos CC . . . veces  
esperamos CX . . . veces  
esperamos XC . . . veces  
esperamos XX . . . veces

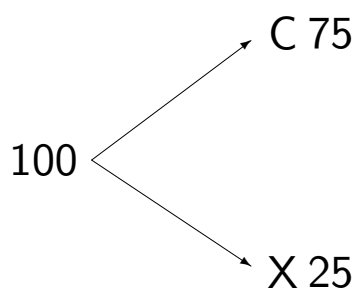


3. ¿Y si lanzamos 3 monedas distintas?

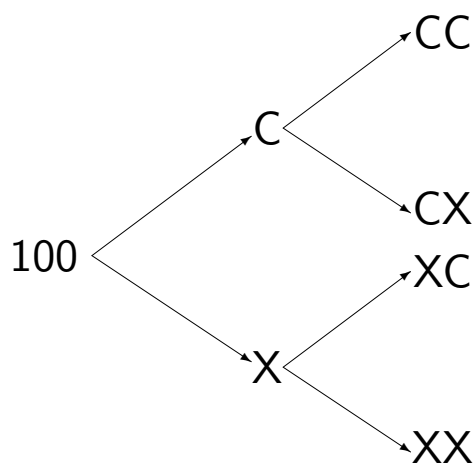


## Moneda trucada

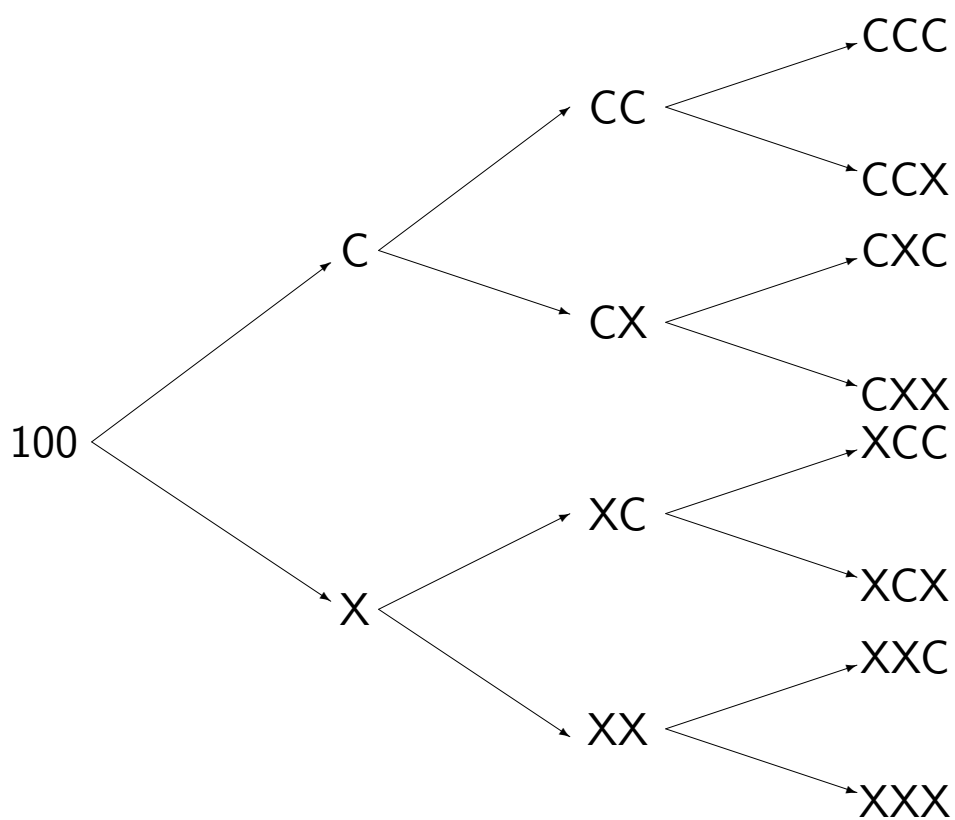
1. Lanzamos una moneda 100 veces. La moneda está trucada: esperamos 75 caras y 25 cruces (más o menos).



2. Lanzamos 2 monedas (distintas) sucesivamente, 100 veces  
esperamos CC . . . veces  
esperamos CX . . . veces  
esperamos XC . . . veces  
esperamos XX . . . veces

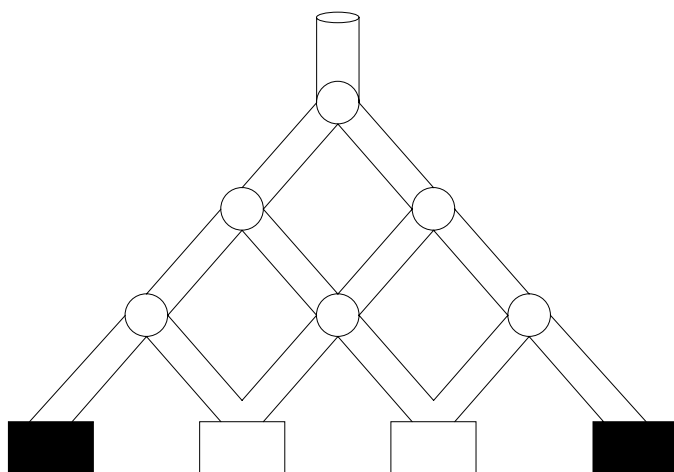
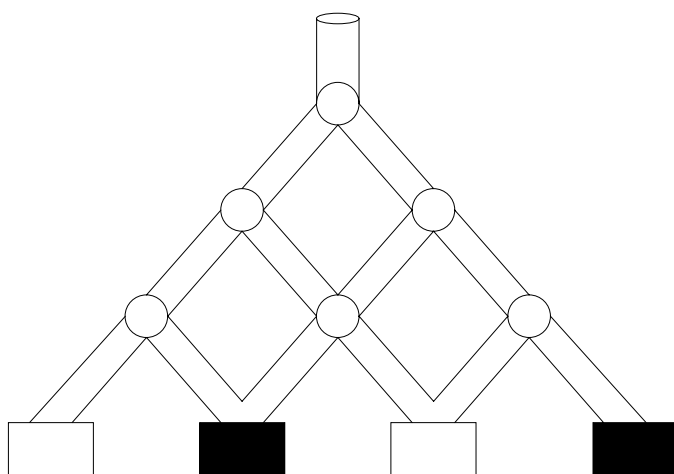


3. ¿Y si lanzamos 3 monedas distintas?

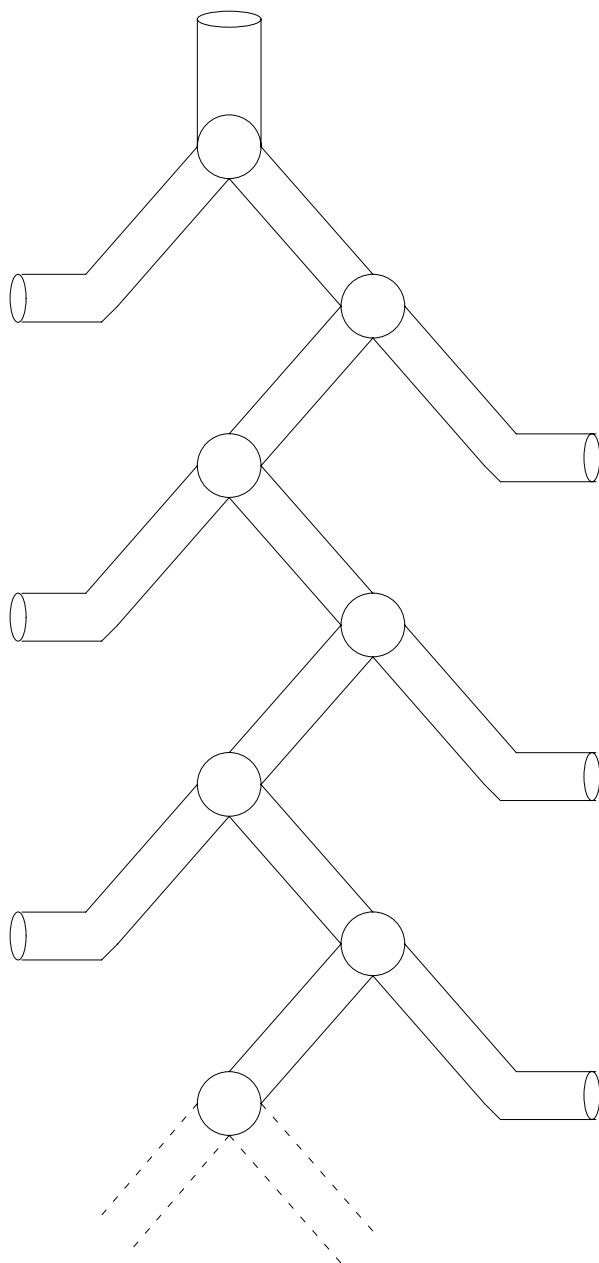


## Izquierda y derecha

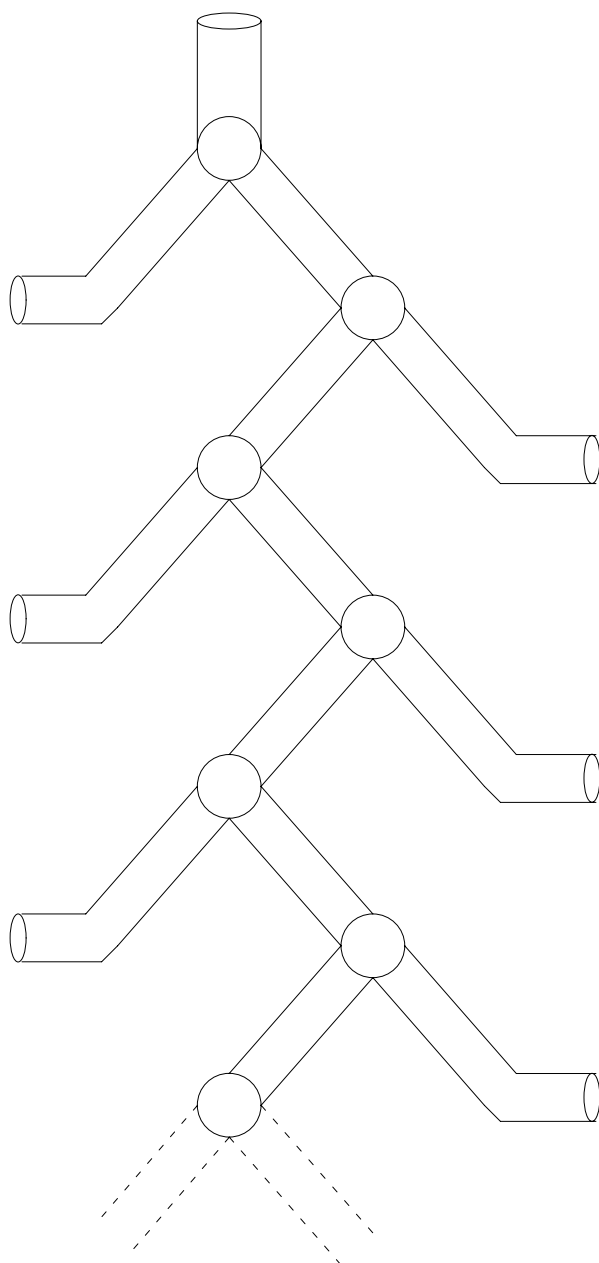
Se introducen bolas en la copa. En cada nodo la mitad de las bolas se irán hacia la izquierda y la otra mitad hacia la derecha. ¿Qué proporción de bolas llegará a las cajas oscuras?



Si, de nuevo, en cada nodo la mitad de las bolas se van hacia la izquierda y la otra mitad hacia la derecha, ¿qué proporción de bolas salen por la derecha y qué proporción por la izquierda?



Si ahora, en cada nodo, un 40 % de las bolas se va hacia la izquierda y el restante 60 % hacia la derecha, ¿qué proporción de bolas salen por la derecha y qué proporción por la izquierda?



## Casanova

El famoso Giacomo Casanova gustaba de jugar a la ruleta en el casino. Había ideado un sistema de juego que se conoce como la martingala de Casanova. Consiste en lo siguiente: cada noche Casanova va al casino y siempre apuesta a ROJO. La primera apuesta era de un doblón. La primera vez que sale ROJO se retira por esa noche, pero si no, va doblando la apuesta cada vez.

Casanova decía que con esa estrategia cada noche se gana en limpio un doblón.

Se trata de comprobar que Casanova tenía razón (siempre que uno suponga que puede seguir jugando indefinidamente y que se dispone de tanto dinero como el casino).

La verdad es que cada noche Casanova iba al Casino con 15 doblones. Estuvo yendo a jugar 160 días seguidos. ¿Cuánto dinero crees que ganó?

## **Planificación ganadera**

En una explotación ganadera han decidido que es preciso disponer de más terneras que terneros.

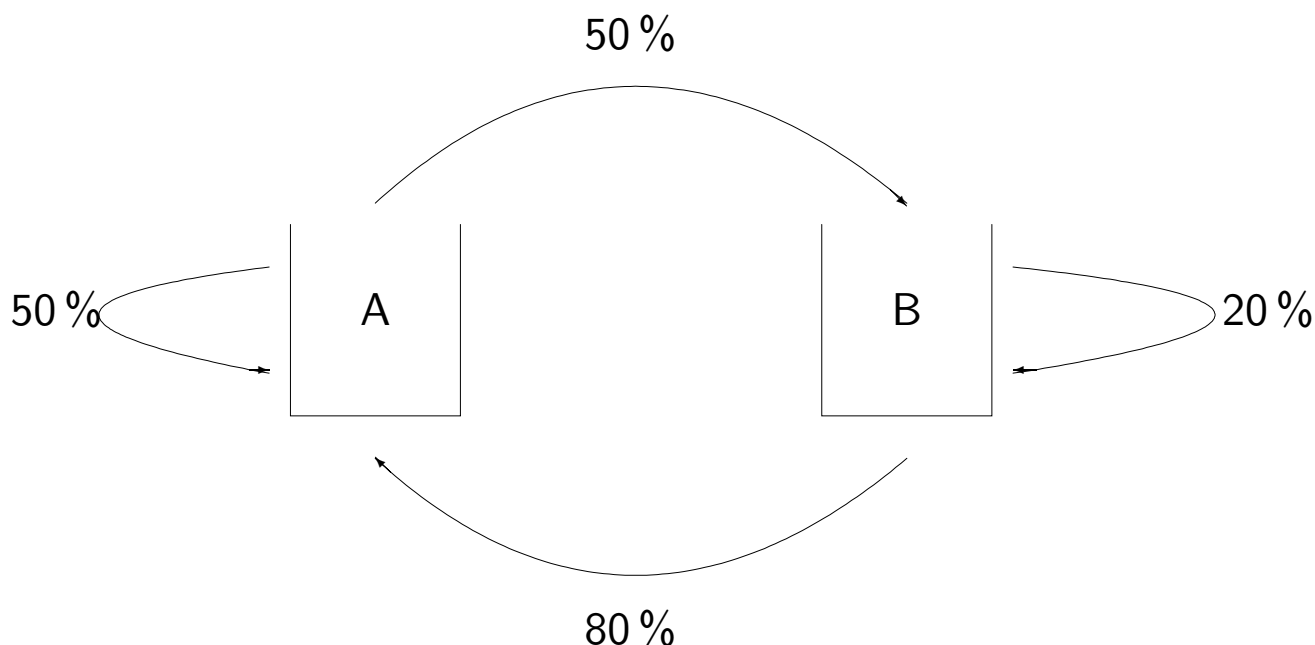
Para lograr esto, deciden que las vacas que tienen seguirán pariendo hasta la primera vez que den a luz a una ternera.

¿Crees que su estrategia de planificación dará el resultado deseado?

## Evolución de urnas

Tenemos dos urnas: una urna  $A$  y otra urna  $B$ . Al comienzo hay 1300 bolas en cada una de las urnas.

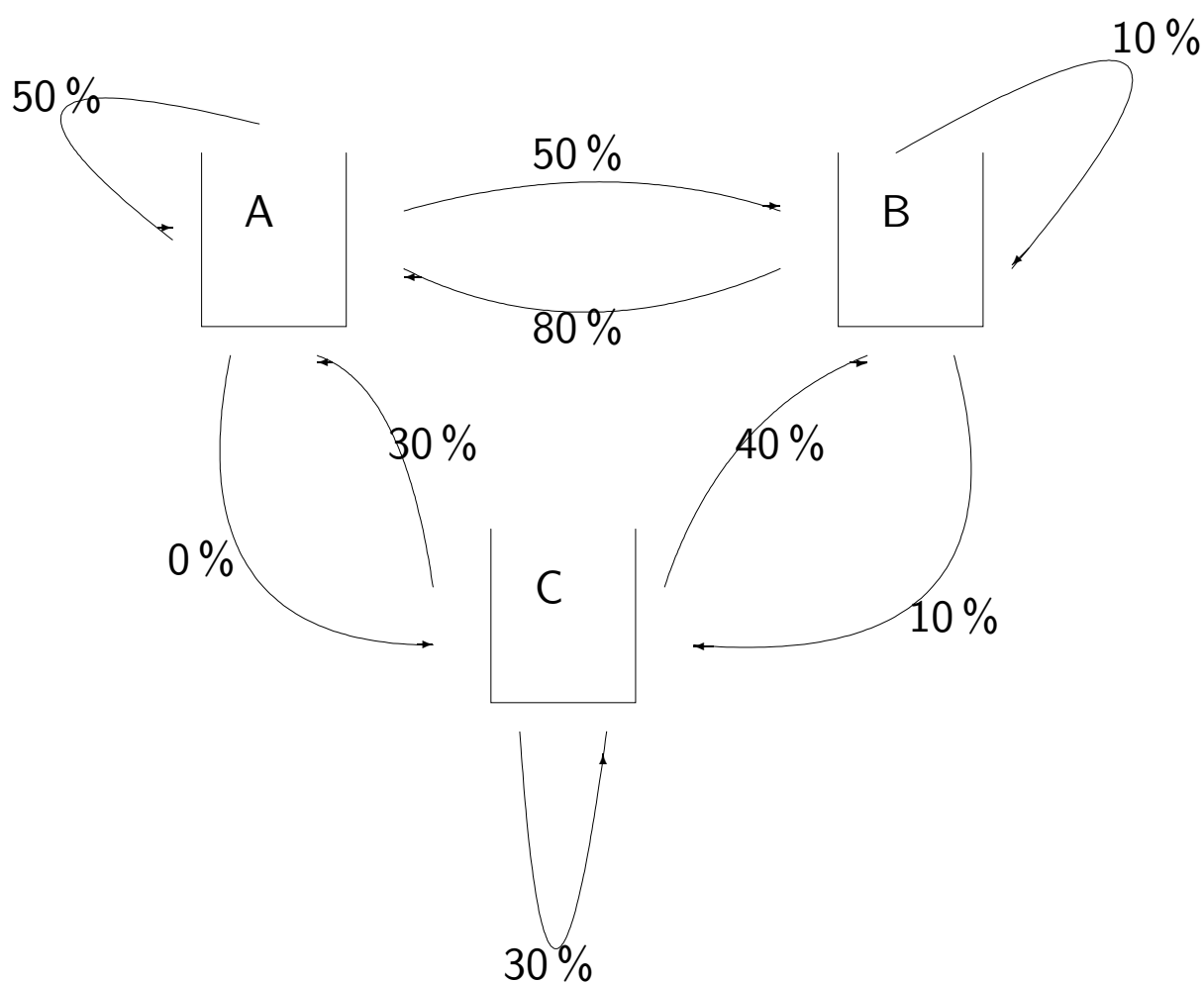
En cada paso, el 50 % de las bolas de  $A$  se retiran y se pasan a  $B$  y *simultáneamente* el 80 % de las de  $B$  pasan a  $A$ .



¿Cuántas habría dentro de dos pasos?

Tras muchos (muchísimos) pasos, ya no cambia el número de bolas en cada urna con cada nuevo paso. ¿Cuántas bolas hay en cada urna? Se dice que estamos en una **composición estable de las urnas**.

Ahora tenemos tres urnas  $A$ ,  $B$  y  $C$ . El esquema que sigue explica el proceso de evolución en cada paso. En la distribución de partida cada urna tiene 1000 bolas. De nuevo, en una situación estable, ¿cuántas bolas hay en cada urna?



## Patrones

Buscamos **patrones** en una serie de lanzamientos sucesivos de una moneda equilibrada. Por ejemplo, una cara  $C$ , quizás  $XC$ , quizás  $XCCX$ , etc.

Por ejemplo, el patrón  $C$ , ¿es seguro que aparecerá, tarde o temprano? ¿Y  $CC$ ? ¿Y el patrón  $CCXCCCXCC$ ?

Lo planteamos en términos de un juego: el jugador  $A$  apuesta por el patrón  $CC$ , mientras que  $B$  lo hace por  $CX$ . Se lanza la moneda (las veces que sea necesario) hasta que alguno de los dos patrones aparezca (completo). ¿Puede acabar el juego en empate?

¿Qué proporción de las veces que se juegue acabará ganando el jugador  $A$ ?

¿Y si el jugador  $B$  apuesta por el patrón  $XC$ ?