Ramsey

Talento Matemático

Real Academia de Ciencias

JLF

Primavera de 2001

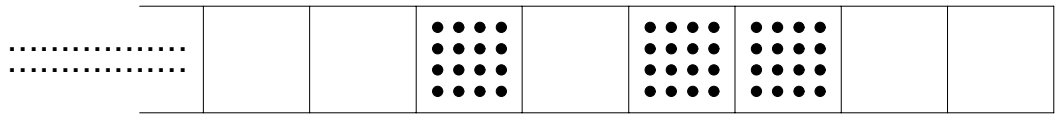
Ramsey 1

Tenemos una máquina que produce una cinta en la que van apareciendo casillas de tonos claro y oscuro. No hay ninguna indicación de cómo se van generando esas tonalidades en las casillas. A la máquina se le puede instruir para que en cada paso genere una, dos, tres o k de éstas casillas, que no tiene por qué tener la misma tonalidad.

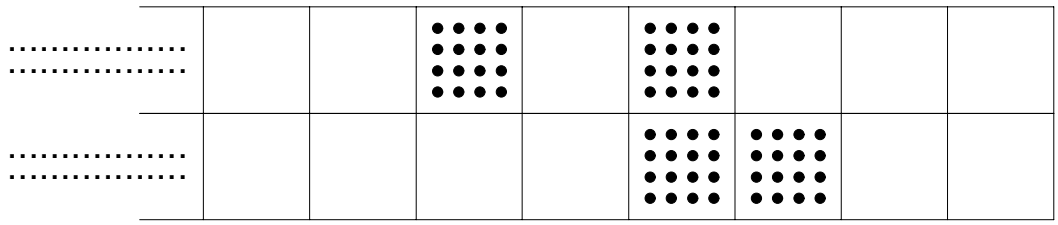
La ilustración de cada ejemplo que sigue indicará cuantas casillas está generando la máquina en cada paso.

En cada uno de los ejemplos nos preguntamos por el número mínimo de pasos que debemos generar para estar seguros de que se obtiene una cierta cantidad de pasos en los que las casillas cumplen las condiciones que se piden. Recordemos que no tenemos ninguna información sobre cómo la máquina genera las tonalidades de las casillas.

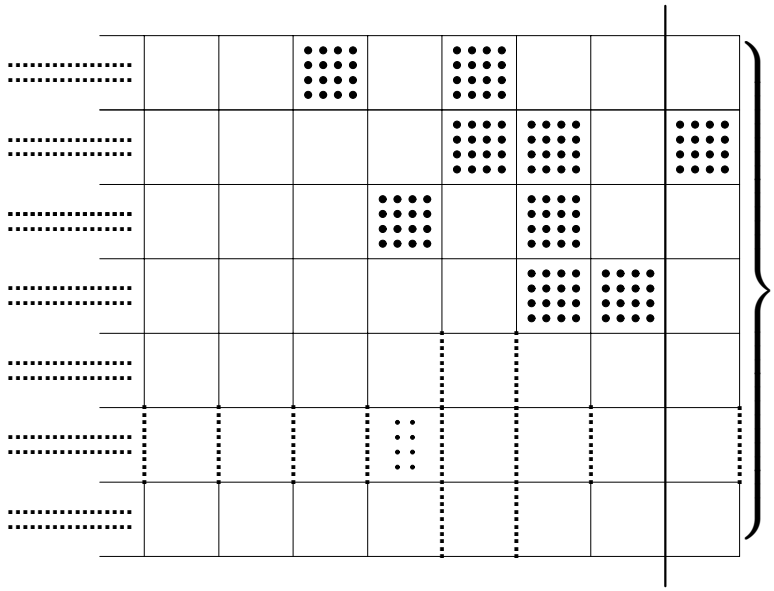
1) La máquina en cada paso genera *una única* casilla. Nos preguntamos ¿cuál es el número mínimo de casillas que debemos generar para asegurarnos de que aparecen dos casillas oscuras o dos claras? ¿Cuál es el número mínimo de casillas que es necesario generar para asegurar de antemano que entre ellas aparecen 5 casillas oscuras o 5 casillas claras?



2) La máquina en cada paso genera *dos* casillas cada una de las cuales puede ser de tono claro o de tono oscuro. ¿Cuántos pasos hacen falta para asegurar que al menos *dos* pasos hayan dado lugar al mismo resultado? ¿Y para que en *cinco* pasos se haya generado el mismo resultado?)



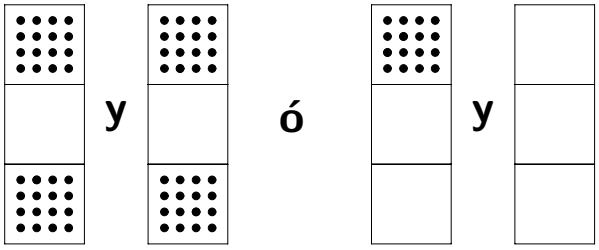
3) Ahora en cada paso se generan k casillas, de nuevo sólo con *dos* tonalidades, ¿Cuántos pasos hay que dar para estar seguros *a priori* de que se generarán *dos* columnas de k casillas exactamente iguales? ¿Y *cinco* exactamente iguales?

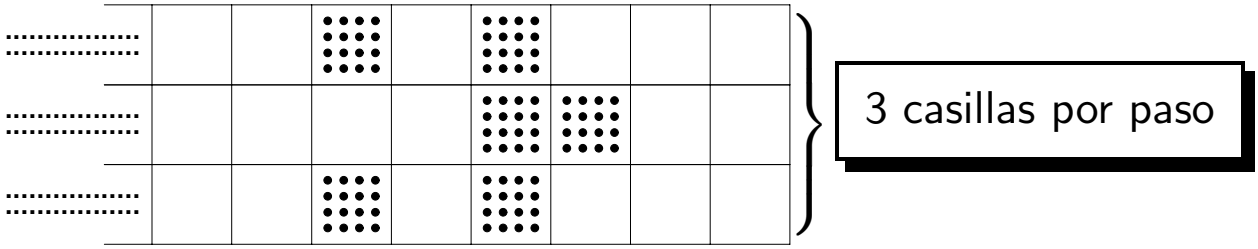


k casillas en cada paso

4) ¿Y si ahora sabemos que las casillas se generan en *tres* tonalidades: oscura, gris medio, y clara?

5) Se complica un poco más. Supongamos que en cada paso se generan tres casillas con sólo dos tonalidades posibles. Ahora nos preguntamos, ¿cuantos pasos hay que dar para asegurarse de que hay *dos* columnas que en *dos* posiciones (cualesquiera) coinciden? Por ejemplo:

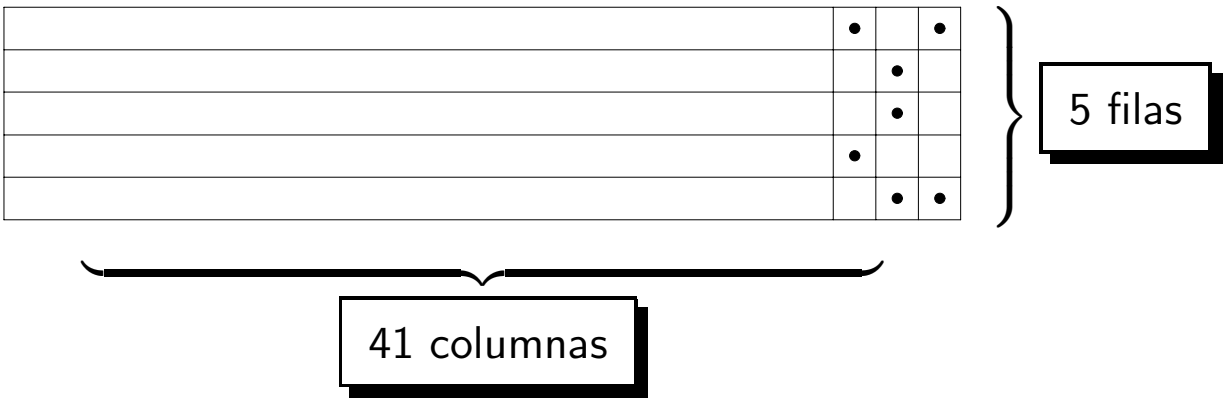




¿Y cuántas para asegurarse de que los resultados de CINCO pasos coinciden en DOS posiciones?

6) Las mismas preguntas que en el punto anterior pero suponiendo que en cada paso se generan k casillas y que además las casillas se pueden colorear de *tres* formas distintas.

7) Tenemos ahora una tablero rectangular de *cinco* filas y *41* columnas. Las casillas de este tablero están coloreadas con dos tonos: claro y oscuro.



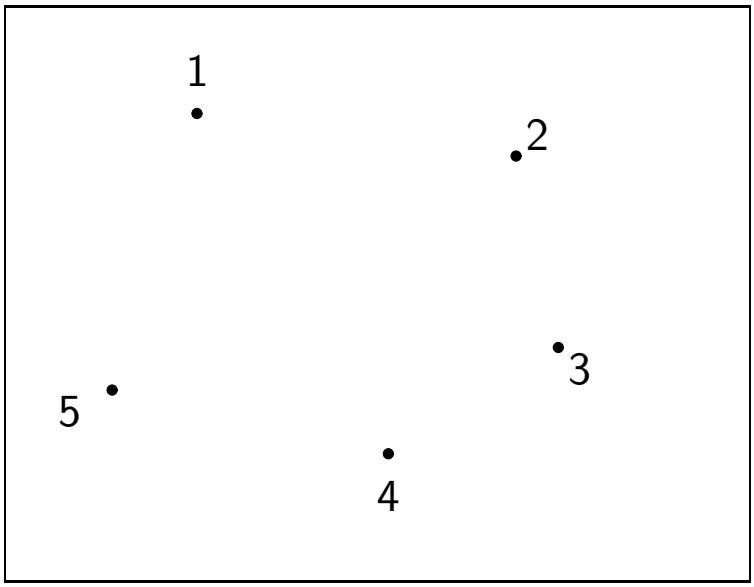
Verificar que se pueden eliminar filas y columnas hasta quedarnos con un tablero 3×3 (habrá que eliminar 38 columnas y 2 filas) de manera que las nueve casillas de ese pequeño tablero sean todas de la misma tonalidad.

8) Supongamos que en lugar de 5 filas tenemos $2k + 1$ filas. ¿Cuántas columnas debemos tener (en lugar de 41) para poder asegurar que eliminando filas y columnas nos quedamos con un tablero $k \times k$ de un sólo color?

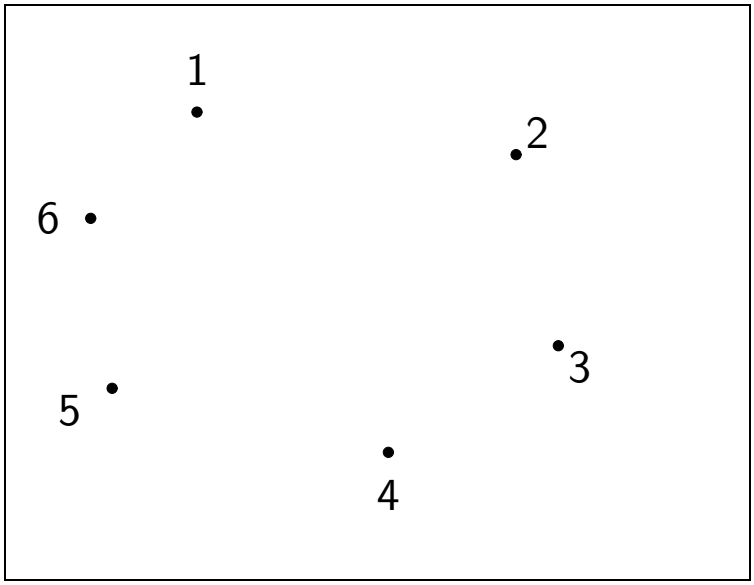
Ramsey 2

Juegos de coloreado

Juego A Tenemos *cinco* vértices pintados en el plano. Hay dos jugadores. El primero dispone del color azul y el segundo dispone del color rojo. Empieza el de color azul. Y se alternan jugando. Cada jugada consiste en escoger dos vértices y pintar un segmento que los una de su color. No está permitido repintar. Gana quien primero logra un triángulo de su color. La partida queda en tablas si se han pintado todas las aristas posibles y no se ha formado ningún color de un sólo color. Verificar que si ambos jugadores juegan *bien* siempre queda en tablas.



Juego B Las mismas reglas que antes. Pero ahora partimos de seis puntos. Comprobar que *no* puede quedar en tablas. Es decir, cuando se han pintado todas las aristas posibles se ha formado un triángulo con aristas de un sólo color.



Sucesiones

Comprobar que si nos dan *cinco* números (naturales) distintos cualesquiera en un cierto orden, por ejemplo,

$$20, 8, 15, 7, 23$$

siempre se pueden elegir 3 de ellos que forman una sucesión creciente o una sucesión decreciente, por ejemplo,

$$8, 15, 23\,,$$

ó

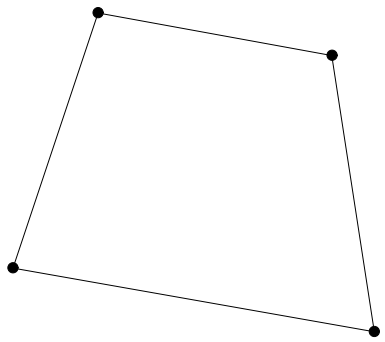
$$20, 15, 7\,,$$

pero no,

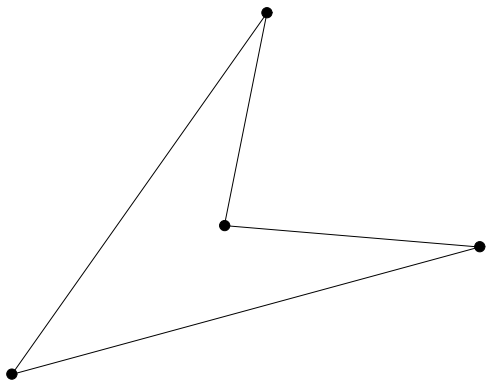
$$20, 15, 23\,.$$

Polígonos

Cuadriláteros convexos:



Cuadriláteros no convexos:



Comprobar que si nos dan *cinco* puntos cualesquiera en el plano, se pueden escoger *cuatro* que son vértices de un cuadrilátero convexo.

Ramsey 3

A. Pintamos cada uno de los números reales con uno de dos colores: rojo o azul. Demostrar que (sea cual sea esa coloración) podemos encontrar x, y, z, que tienen el mismo color y que además cumplen que

$$\frac{x+z}{2} = y\,.$$

B. Cada número de entre $\{1, 2, 3, \ldots, 9\}$ se pinta de rojo o azul. Comprobar que (sea cual sea la forma en que se han coloreado esos *nueve* números) se pueden encontrar *tres*: $x < y < z$ de ellos con

$$y - x = z - y$$