Grafos y Colores

Talento Matemático

Real Academia de Ciencias

JLF

Primavera de 2001

Representación de información en grafos.

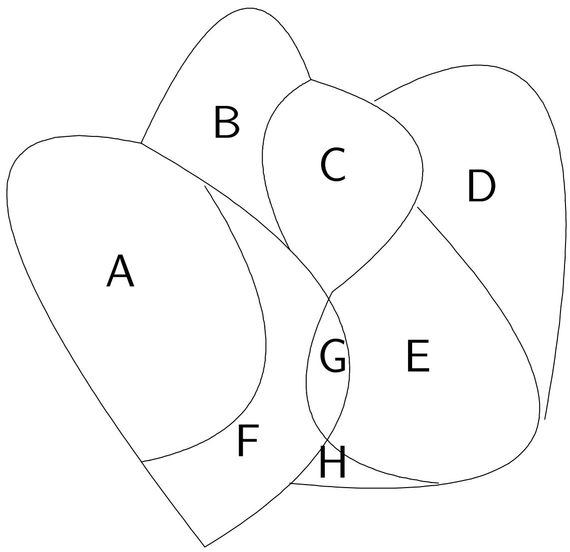
Horario

- Ángel(A), Beatriz(B), Carlos(C), David(D), Eugenio(E)
- – Matemáticas=$\{A, B, C, D, E\}$
  - Inglés=$\{A, B, C\}$
  - Biología=$\{C, D, E\}$
  - Física=$\{E\}$
  - Música=$\{B, D\}$

Tarjetas de identificación

- Reglas
  - Símbolos, los números de 0 a 9
  - No puede haber símbolos en casillas que compartan un lado

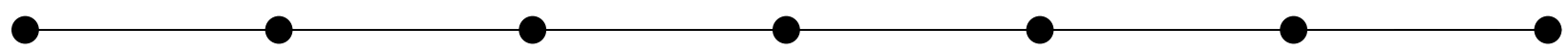
Mapa

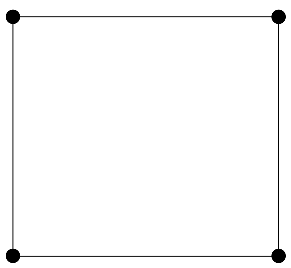


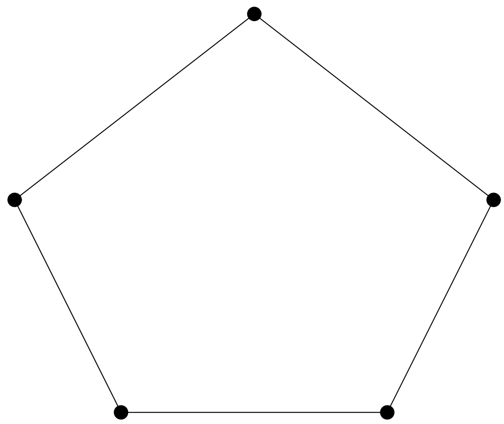
Registros del ordenador

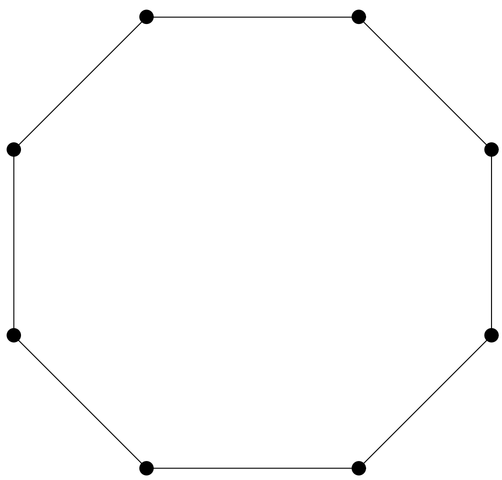
	A	B	C	D	E
1	X				X
2	X		X		X
3	X		X	X	
4	X	X		X	
5		X		X	
6	X	X		X	
7	X			X	X
8			X		X
9	X		X		X
10	X				X

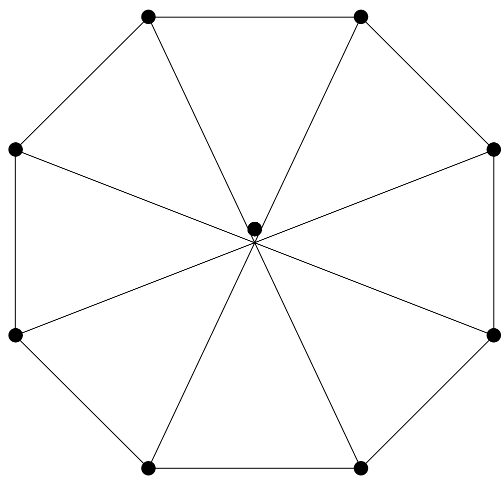
Número cromático

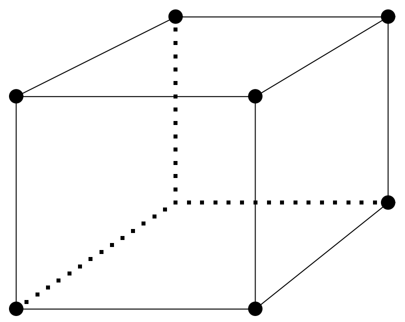


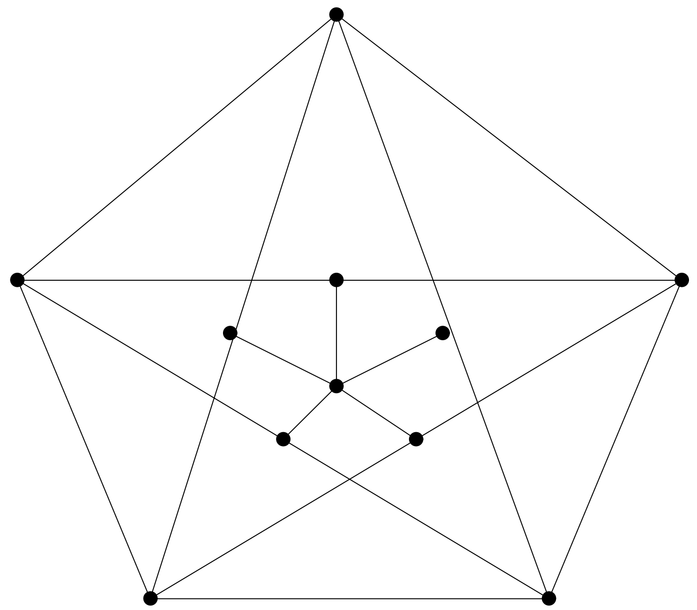


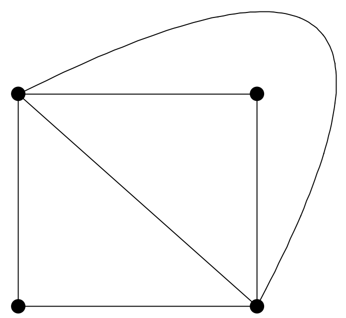


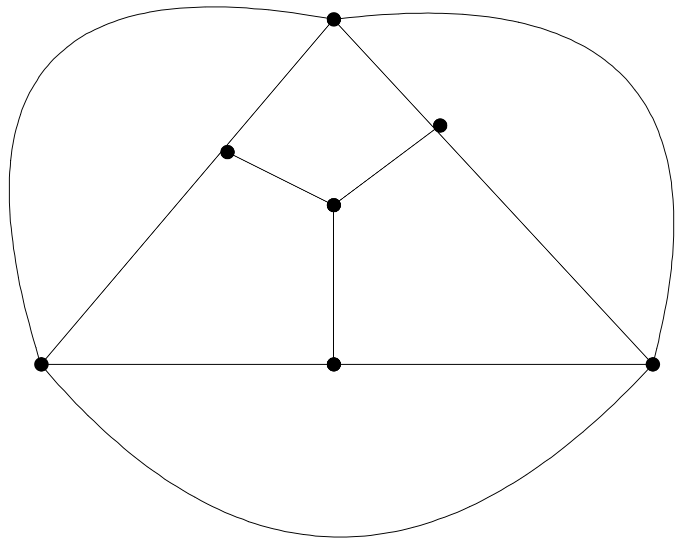


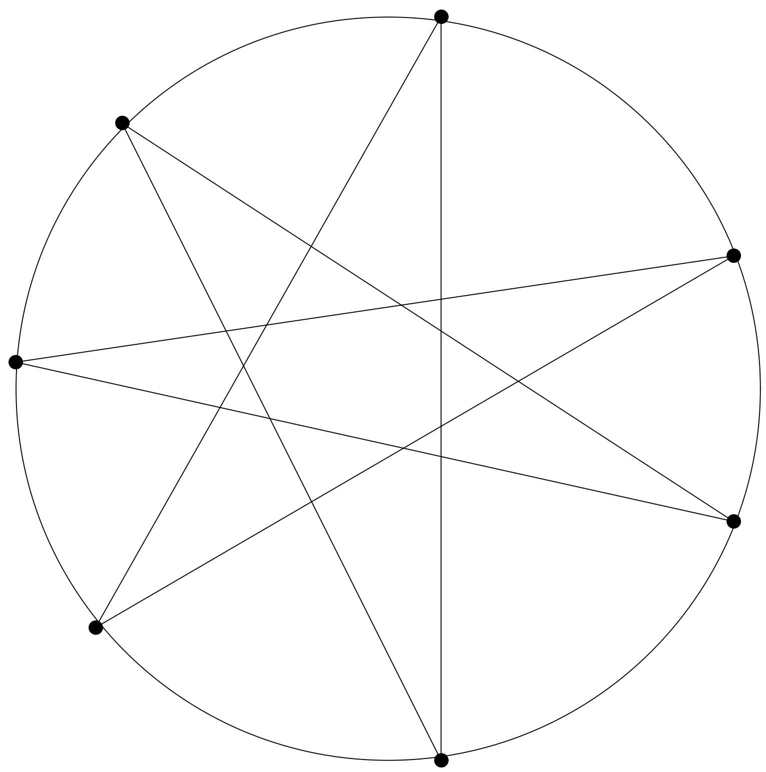










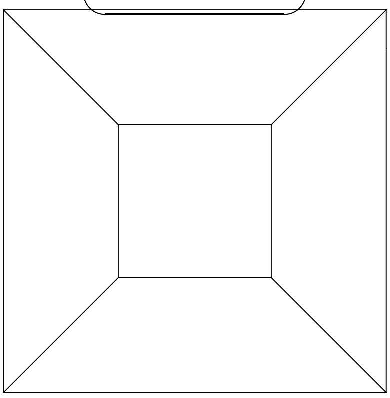


Algoritmo avaricioso

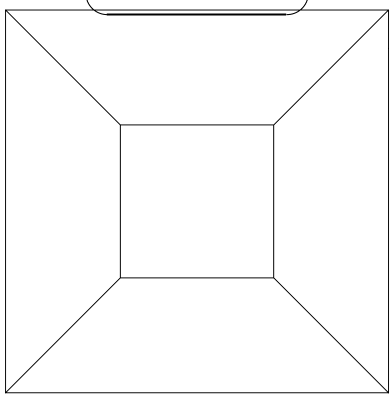
- Se ordenan los vértices
- Se asignan colores sucesivamente siempre el primer color disponible

Ordenar los vértices para que el algoritmo avaricioso use los colores que se indican.

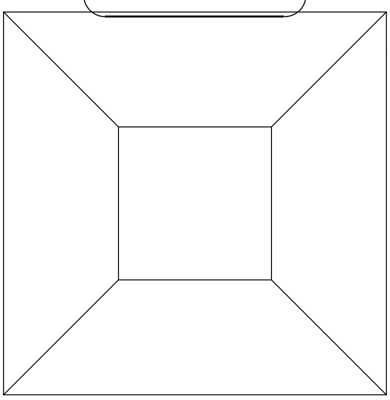
2 colores



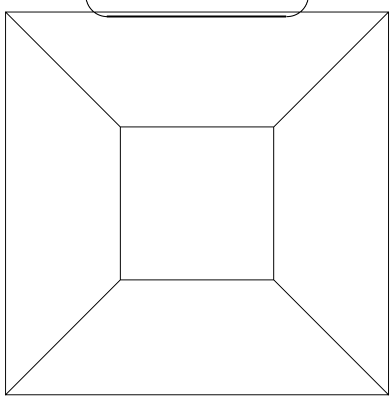
3 colores



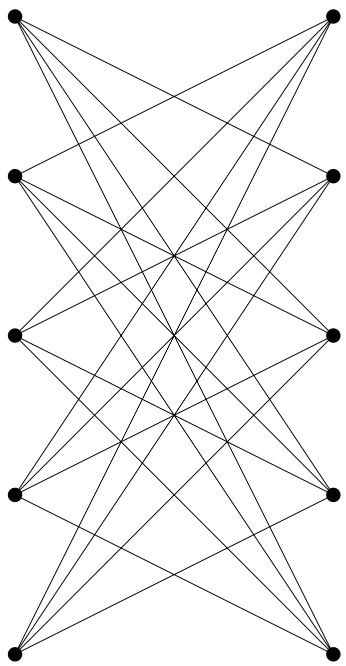
4 colores

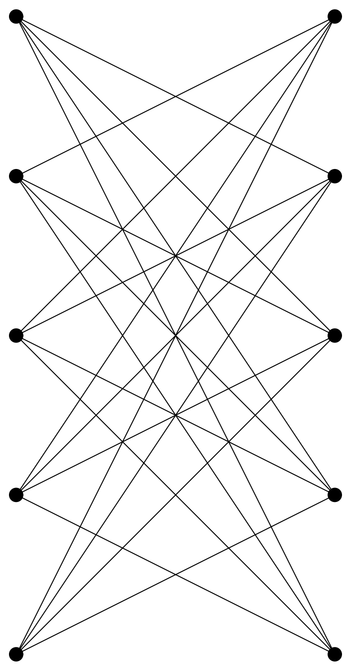


5 colores



Ordenar para que el algoritmo avaricioso use dos/cinco colores





Colegas y adversarios

1. En una clase hay 14 alumnos, cada uno de ellos se lleva MAL con al menos ocho de sus compañeros. Queremos formar equipos, cuantos menos mejor. ¿Cuántos equipos hemos de formar al menos?

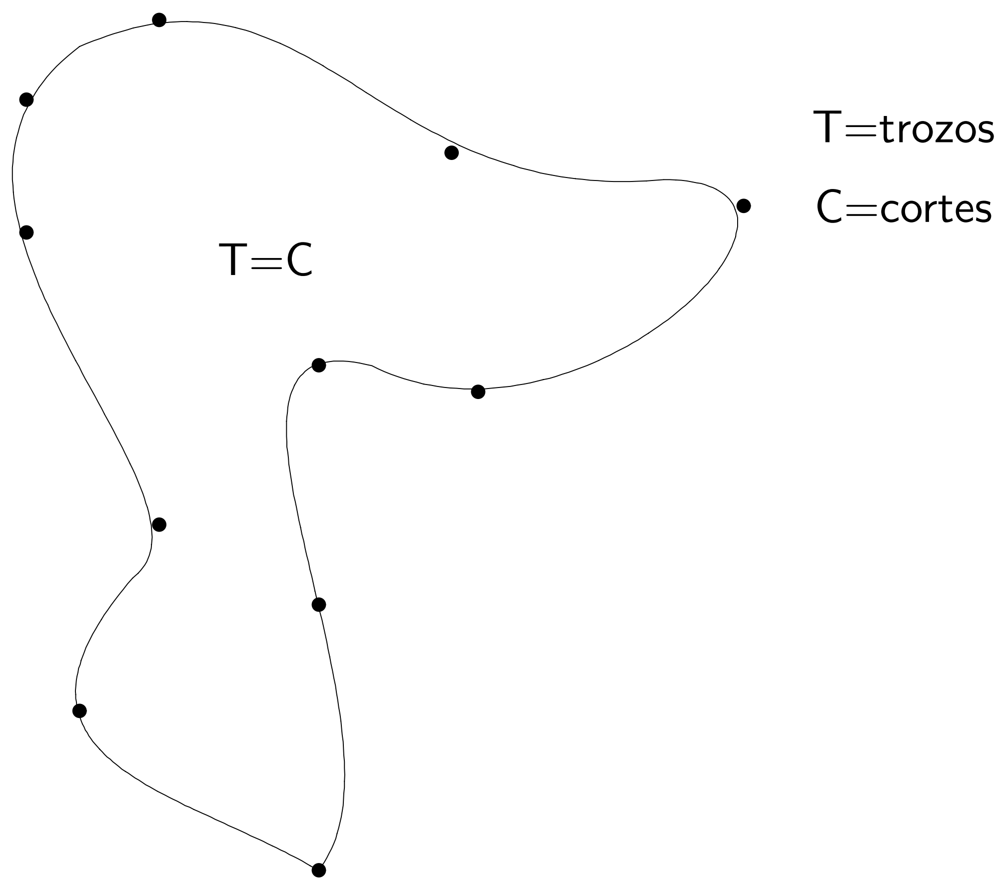
2. Ahora la clase tiene un cierto número de alumnos. Unos se llevan bien y otros mal. Hemos logrado formar 5 equipos donde en cada equipo todos se llevan bien entre sí. Pero también los hemos logrado agrupar en 7 grupos donde dentro de cada uno de ellos todos se llevan mal entre sí. Dar un argumento para justificar que en esa clase a lo sumo hay 35 alumnos.

3. En un ordenador hay que realizar sucesivamente las tareas de 1 a 10 y vuelta a empezar. En cada tarea se usa la información de las cinco variables A, B, C, D y E, que se indican. Queremos usar pocos registros de memoria del ordenador para almacenar esas información. ¿Cuál es el número mínimo de registros que hace falta? Hay que tener en cuenta que mientras se esté usando una variable ésta no puede cambiar de ubicación en la memoria.

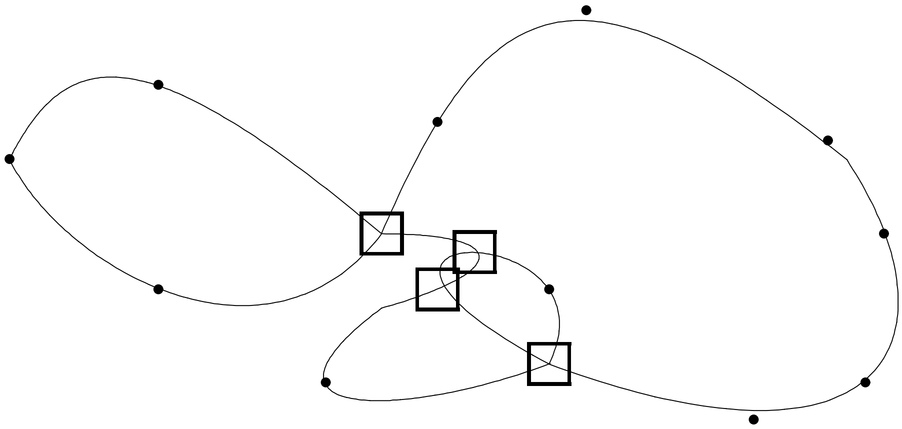
	A	B	C	D	E
1	X				X
2	X		X		X
3	X		X	X	
4	X	X		X	
5		X		X	
6	X	X		X	
7	X			X	X
8			X		X
9	X		X		X
10	X				X

Invariantes

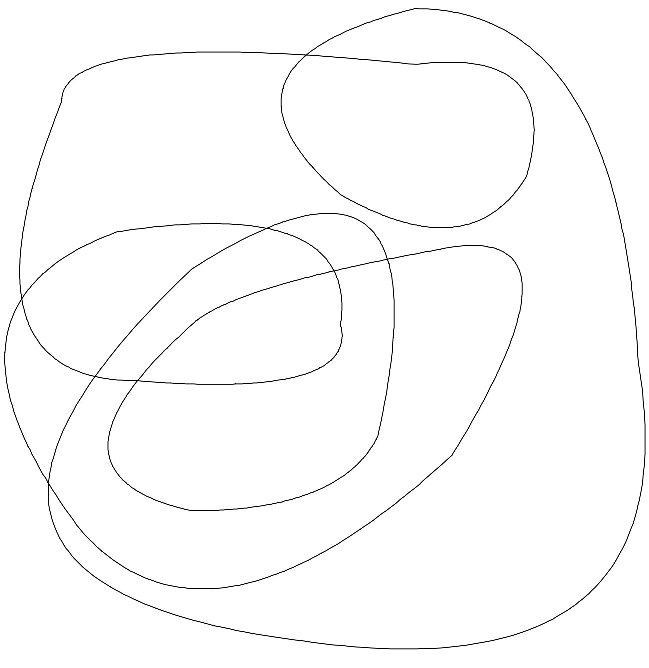
Trozos, cortes y cruces



$\square$=X=Cruces
T=Trozos
C=Cortes



¿Qué relación hay entre T, C y X?



¿T, C, X?

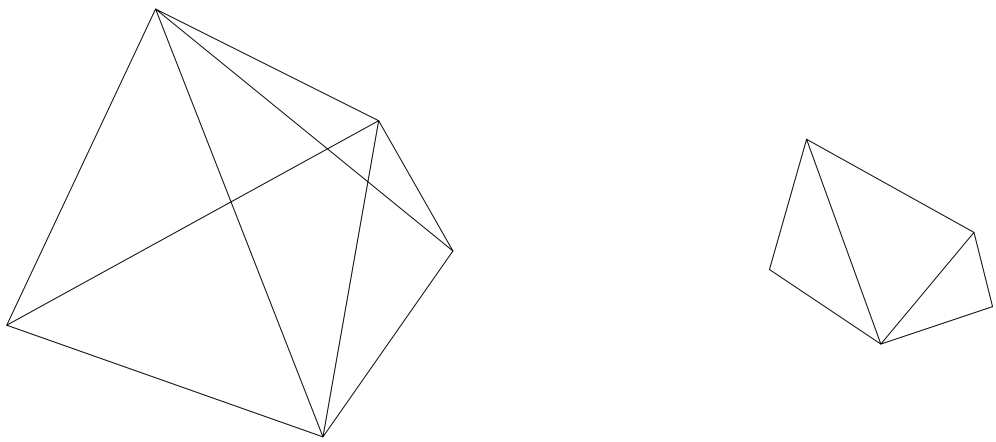
Grafos planos, grafos conexos

En todo grafo plano conexo:

- C=Caras
- A=Aristas
- V=Vértices

$$\boxed{C+V=A+2} \Longleftarrow \text{EULER}$$

¿Y si no es conexo?



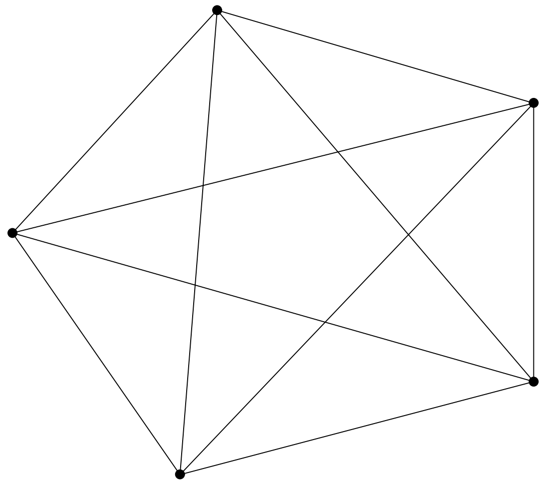
1. En un país hay 7 lagos conectados por 10 canales de forma que se puede ir de cualquier lago a cualquier otro lago nadando, ¿cuántas islas hay?

Grafos planos conexos

- ¿Cuántas aristas tiene una cara en su borde?
- Siempre se tiene $3 \cdot C \leq 2 \cdot A$.
- Siempre $3 \cdot V \geq A + 6$.
- Si todos los vértices tiene seis vecinos (al menos) entonces: $3 \cdot V \leq A$
- Siempre hay un vértice de grado ≤ 5.

- TODO GRAFO PLANO SE PUEDE COLOREAR CON SEIS COLORES

1. ¿Se puede dibujar el grafo siguiente en un plano sin que se corten las aristas?



2. Un grafo tiene 11 vértices y todos los pares de vértices son vecinos. cada arista se colorea bien de color $rojo$ o bien de $verde$.

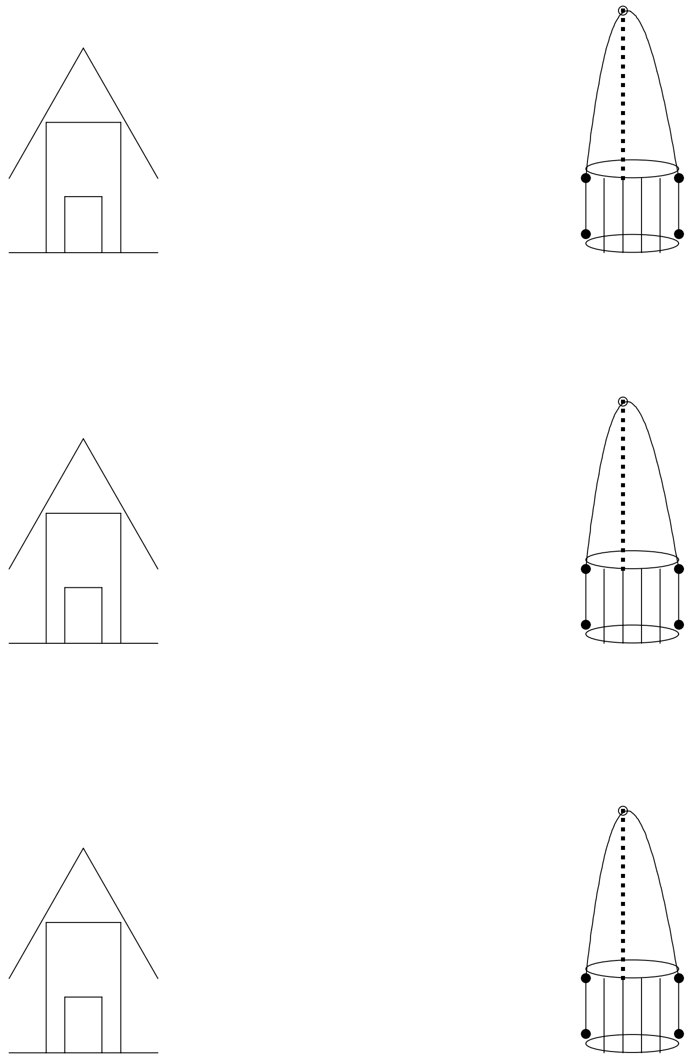
Tenemos entonces dos grafos, el grafo rojo y el grafo verde.

Uno de los dos no se puede dibujar en el plano. ¿Por qué?

3. Comprobar que si todas las caras tiene al menos 4 vértices en su borde entonces:

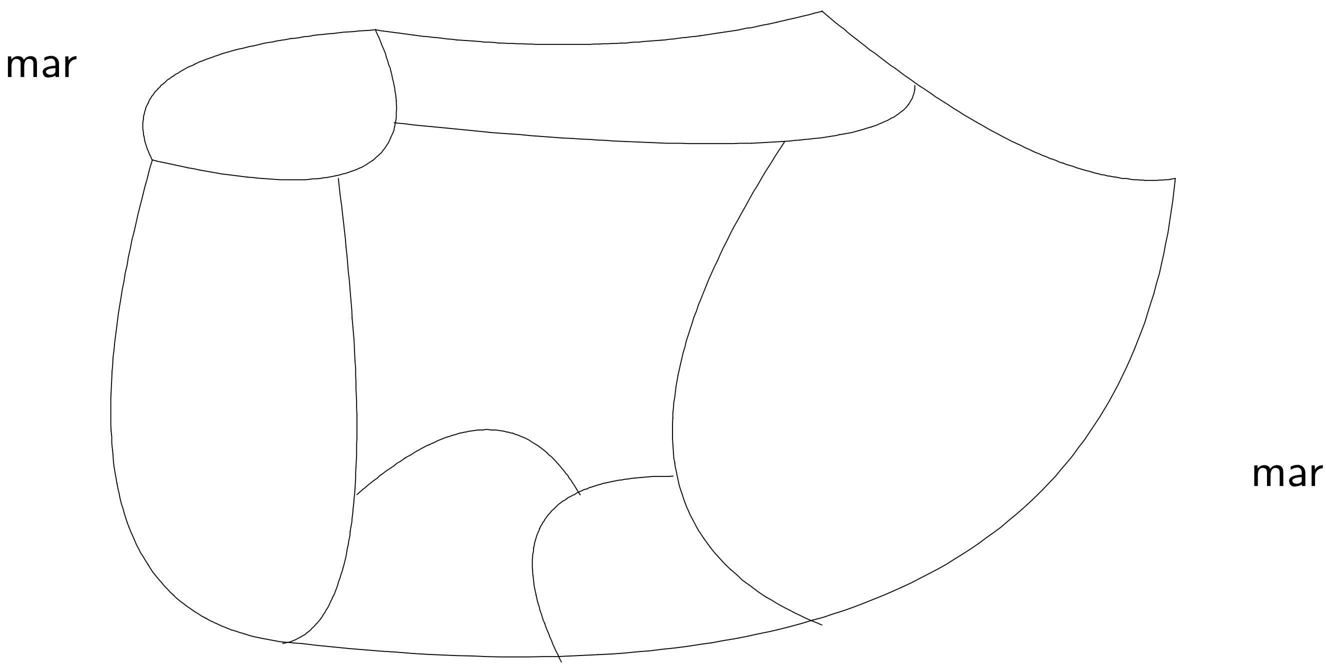
- $2 \cdot C \leq A$
- $2 \cdot V \geq A + 4$

4. Tenemos 3 casas y 3 pozos:



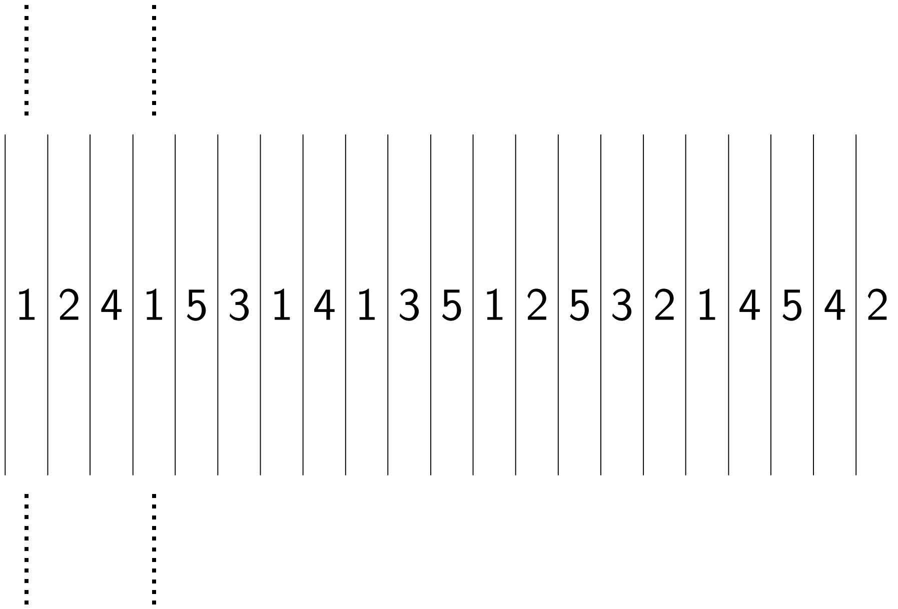
Los dueños de las casas quieren hacer caminos para llegar a los 3 pozos, pero se llevan mal entre ellos y no quieren que sus caminos se crucen ¿pueden hacerlo?

5. **Mapas y planos.** Representar como grafo y colorear “bien”.

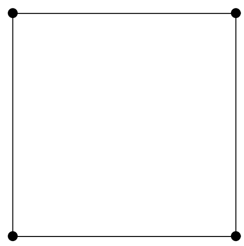


6. ¿Cuántos colores hacen falta? Igual número significa que es el mismo territorio.

.

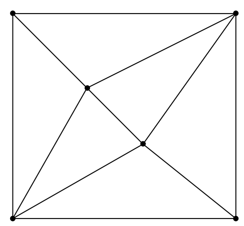


7. En un cuadrado



ponemos 100 puntos y luego trazamos aristas que no se crucen de manera que el cuadrado queda dividido en triángulos. ¿Cuántos triángulos aparecen?

EJEMPLO. Con 2 puntos sólo.



hay 6 triángulos.

- Hacer un tabla de número de puntos contra número de triángulos.
- ¿Qué relación hay entre el número de puntos y el número de triángulos.
- Comprobar lo obtenido en el paso anterior, usando Euler.

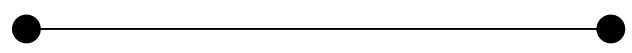
Capacidad cromática

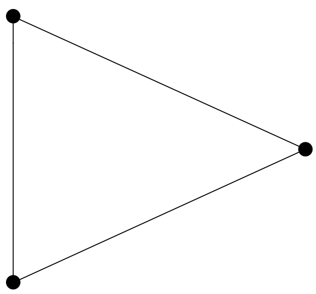
¿De cuántas maneras *distintas* se puede colorear un grafo G con un paleta en la que hay n colores?

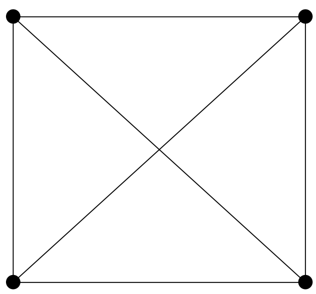
Se denota mediante

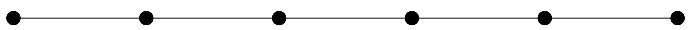
$$p_G(n)$$

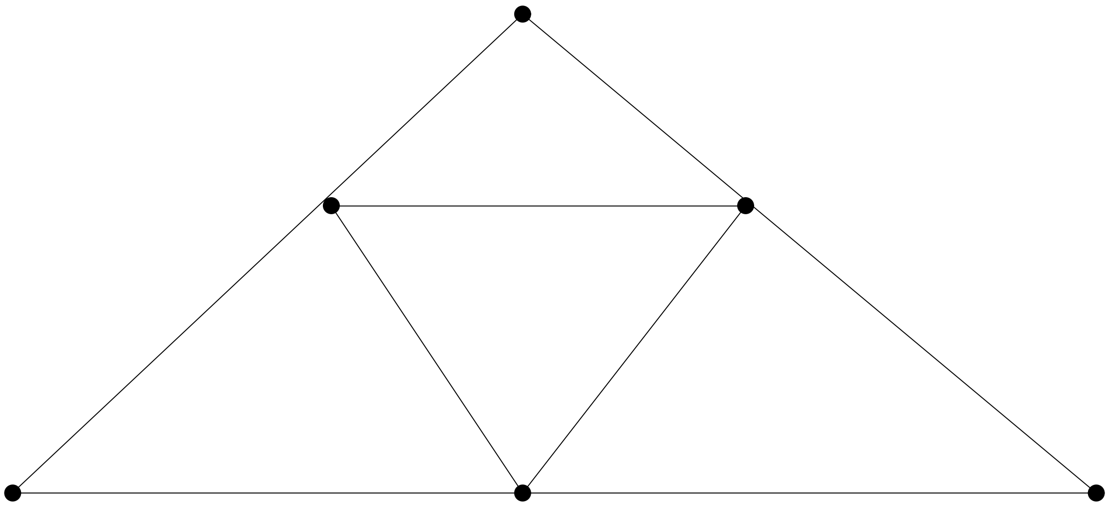
1. Calcular $p_G(n)$ para cada uno de los siguientes grafos.



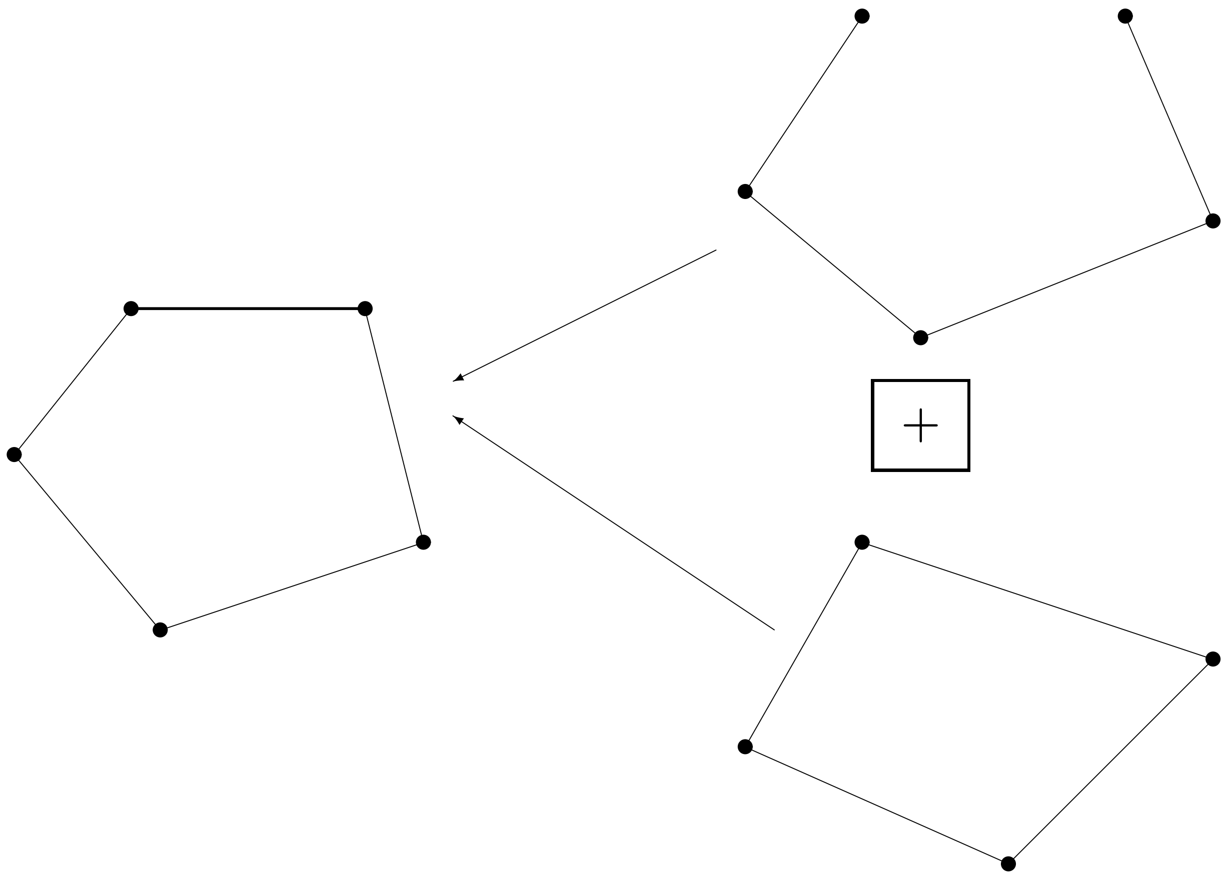




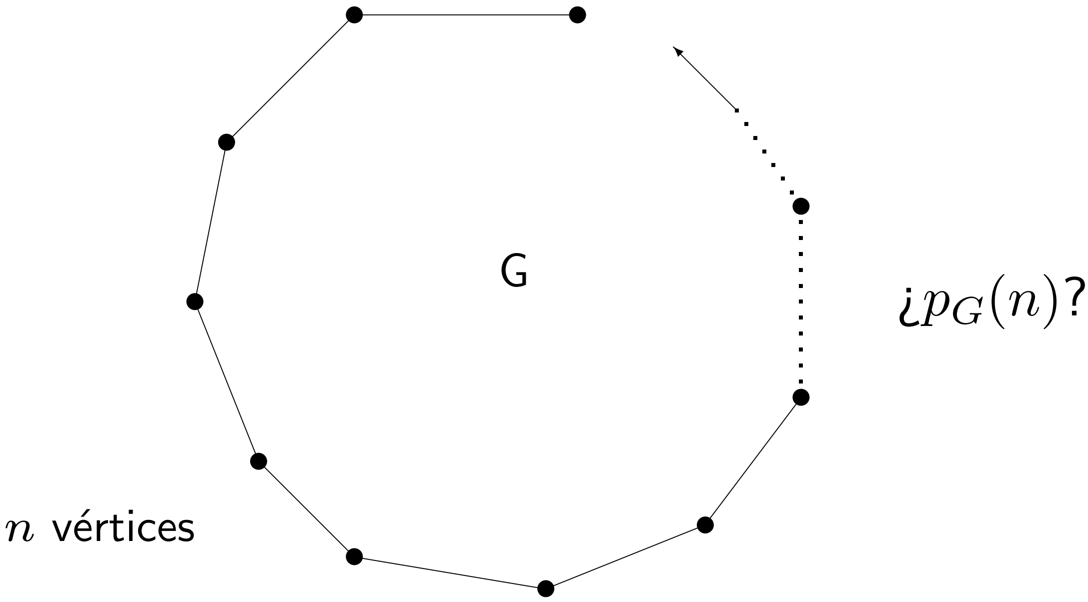




2. Calcular $p_G(n)$ del pentágono a partir de los $p_G(n)$ de los dos grafos que se indican:



3. Calcular los p_G de los polígonos por inducción.



4. *Reto:* Calcular $p_G(n)$ donde G es el grafo del cubo: