Sistemas Dinámicos I

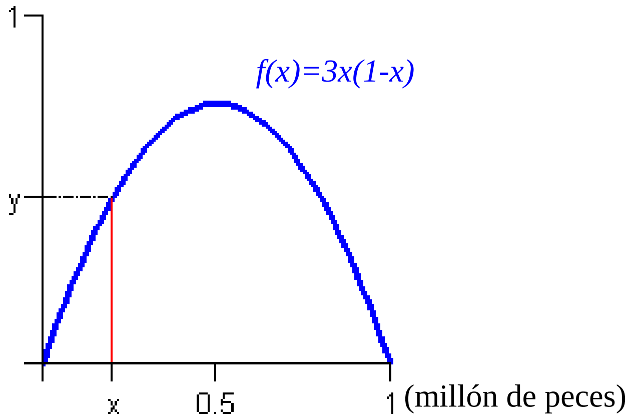
Leyes de crecimiento y puntos de equilibrio

Miguel Reyes

Febrero 2006

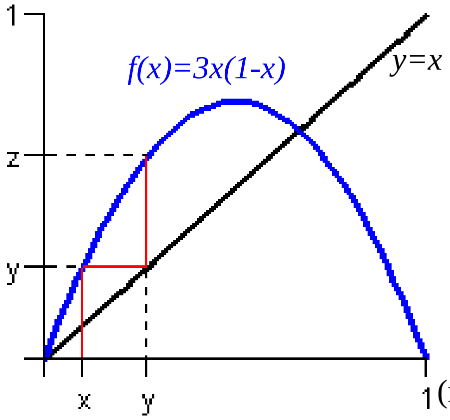
La naturaleza es un medio en el que suceden una gran cantidad de procesos que interaccionan entre sí. Los **sistemas dinámicos** son muy útiles para estudiar y entender cómo evolucionan este tipo de fenómenos y, además, han dado lugar a importantes descubrimientos recientes como la existencia de **caos**. Aquí, nos aproximaremos a esta teoría matemática por medio de algunos ejemplos sencillos.

1. Una especie de peces se reproduce de forma que si este año la cantidad de peces es x, el año próximo será y, donde y viene dada por la dinámica de crecimiento asociada a la curva f como se indica en la figura.



Si este año no hay peces, ¿cuántos habrá el próximo año?	
Si este año hay 1 millón de peces, ¿cuántos habrá el próximo año?	
¿Cuál es la cantidad de peces que da una cantidad máxima el próximo año?	
¿Cuántos peces debe haber para que la población sea la misma el año próximo?	
¿Cuántos peces debe haber para que aumente la población el año próximo?	
¿Cuántos peces debe haber para que disminuya la población el año próximo?	

2. Si este año hay x peces, el año próximo habrá $y = f(x)$ peces, dentro de dos años habrá $z = f(y)$ peces, y así sucesivamente. Gráficamente, el valor de z se puede obtener siguiendo desde x la línea roja de la siguiente figura:



Obtén gráficamente la población de peces dentro de tres años.

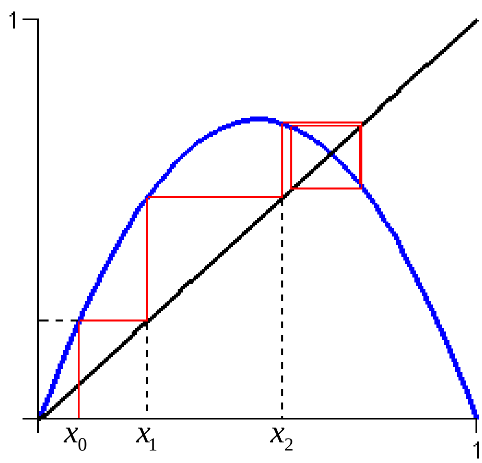
3. Llamando x_k a la cantidad de peces que hay en el año k, la dinámica de la población de peces (también llamada **órbita**) se puede presentar en una tabla del tipo:

Año	0	1	2	3	…	k	$k+1$	…
Cantidad de peces	x_0	x_1	x_2	x_3	…	x_k	x_{k+1}	…

donde el número de peces que hay cada año se obtiene aplicando la función f al número de peces que había el año anterior:

$$x_{k+1} = f(x_k) \quad \text{(\textbf{ecuación} del sistema dinámico)}$$

Gráficamente, la dinámica de la población se puede visualizar siguiendo la línea roja de la figura:



Si la ecuación del sistema dinámico que rige el crecimiento de la población de peces es $f(x) = 3x(1-x)$ y x_0 son los peces que hay inicialmente, el número de peces que hay los dos próximos años es:

$$x_1 = f\left(x_0\right) = 3x_0(1-x_0)$$
$$x_2 = f\left(x_1\right) = 3x_1(1-x_1) = 3\cdot 3x_0(1-x_0)\cdot\left(1-3x_0(1-x_0)\right) = 9x_0(1-x_0)(1-3x_0+3x_0^2)$$

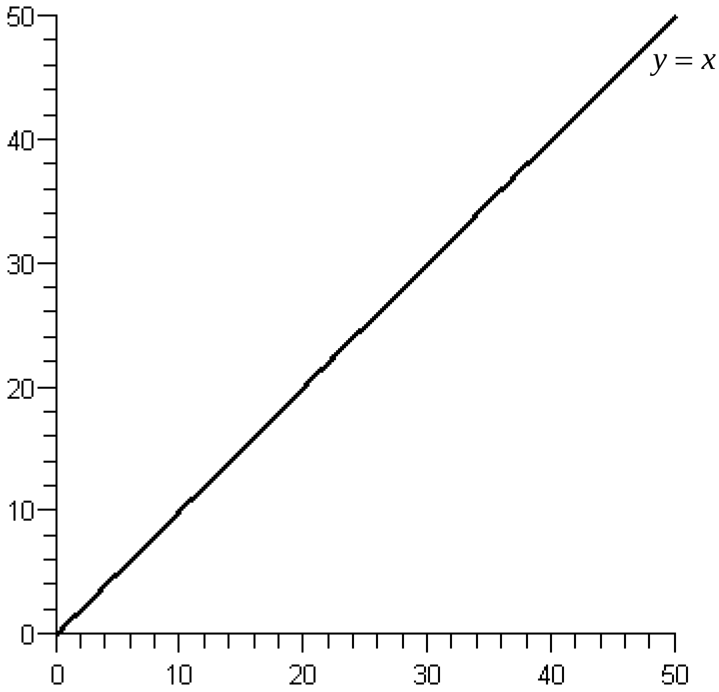
Obtén la expresión para el número de peces que hay el tercer año:

¿Podrías obtener la expresión general de x_n en función de x_0? ¿Sabes algo sobre ella?

4. Una población de bacterias crece mediante un proceso de división en el que cada bacteria se divide en dos cada hora, estando cada una de ellas lista para la reproducción a la hora siguiente.

¿Cuál es la ecuación del sistema que rige la población de bacterias?	
Si hoy a las 8:00 hay 1 bacteria, ¿cuántas habrá mañana a las 8:00? (Usa la aproximación $2^{10} = 1024 \simeq 1000$)	
¿Y pasado mañana a las 8:00?	

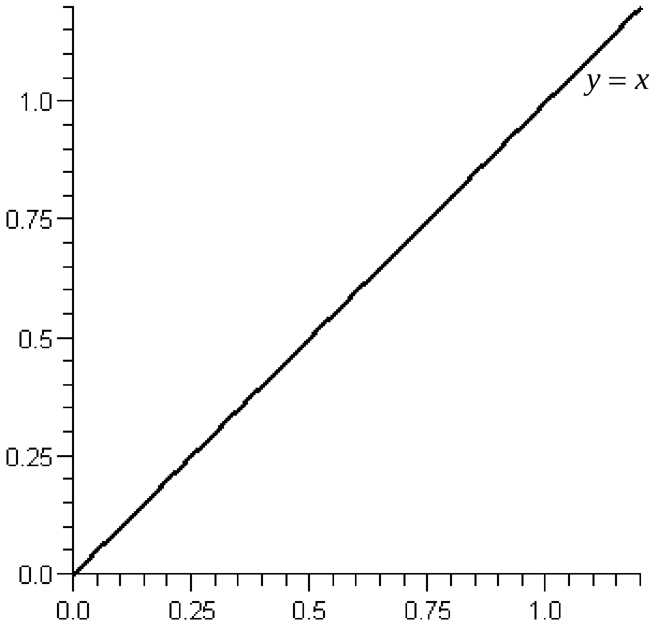
Representa gráficamente la dinámica:



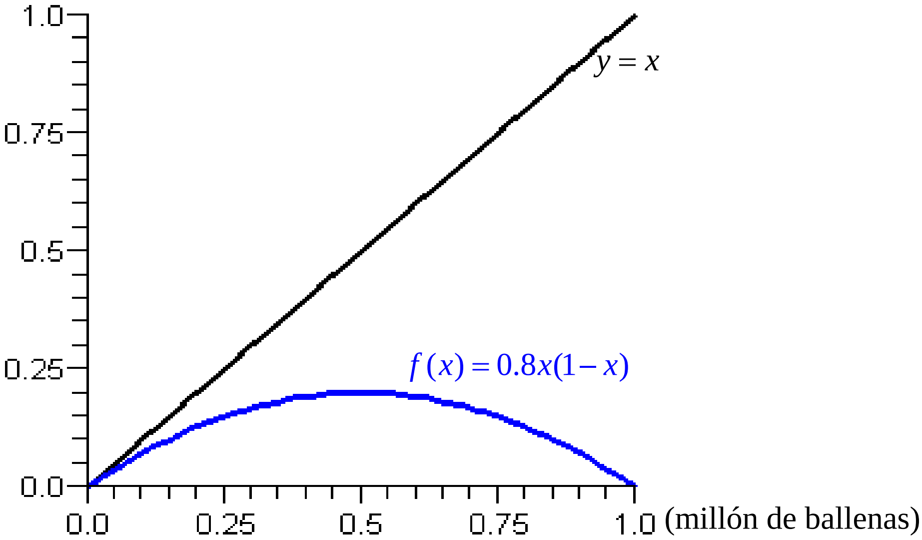
5. En una fiesta de cumpleaños con doce personas asistentes, cada uno pasa al lado del pastel y corta la mitad de lo que queda.

¿Cuál es la ecuación del sistema que rige el pastel restante?	
¿Qué cantidad le queda al perro después de comer las 12 personas?	

Representa gráficamente la dinámica:



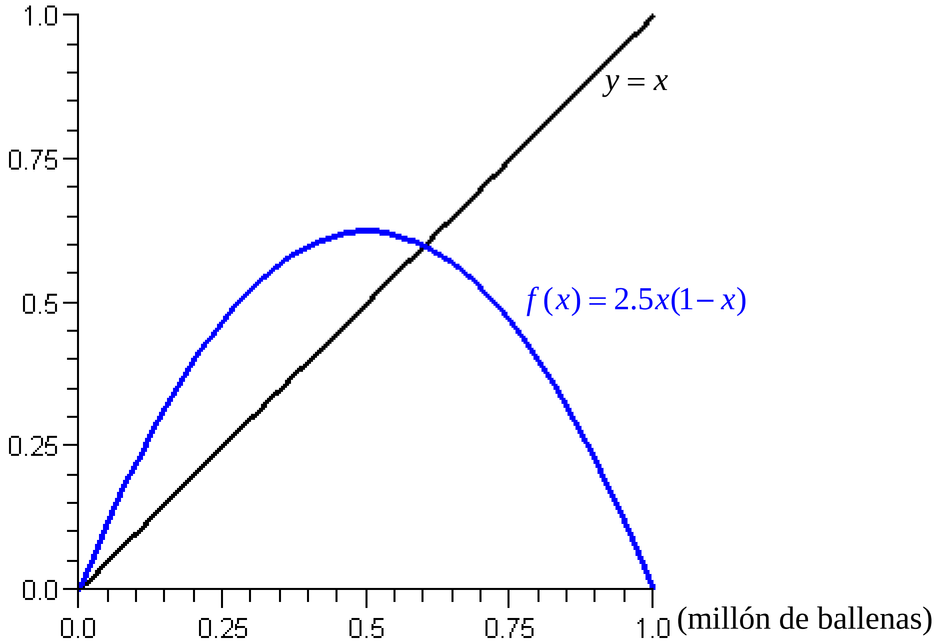
6. Las ballenas y otras especies animales tienen curvas de crecimiento muy lento. En el caso de que se caza libre sus curvas de crecimiento pueden ser así:



Partiendo de una población inicial de medio millón de ballenas:

¿Cuántas habrá al cabo de cuatro años?	
¿Cuántas habrá a más largo plazo (dentro de 10 o 20 años)?	

7. Si se prohíbe la caza de ballenas su curva de crecimiento aumenta pudiendo ser así



Partiendo de 100.000 ballenas, ¿cuántas habrá a largo plazo?	
Partiendo de 100 ballenas, ¿cuántas habrá a largo plazo?	
Partiendo de 900.000 ballenas, ¿cuántas habrá a largo plazo?	
¿Para qué número de ballenas la población crece al año próximo?	
¿Para qué número de ballenas la población decrece al año próximo?	
¿Para qué número de ballenas la población permanece estable?	

8. Un sistema dinámico como, por ejemplo, la población de una especie animal, se dice que esta en **equilibrio** cuando se estabiliza, es decir, cuando su población permanece constante. El sistema dinámico de ecuación f estará en equilibrio para aquella población x que verifica

$$f(x) = x$$

llamada **población o punto de equilibrio** y, en términos matemáticos, **punto fijo**.

Encuentra los puntos de equilibrio del sistema de la actividad 1	
Encuentra los puntos de equilibrio del sistema de la actividad 4	
Encuentra los puntos de equilibrio del sistema de la actividad 5	
Encuentra los puntos de equilibrio del sistema de la actividad 6	