Fractales

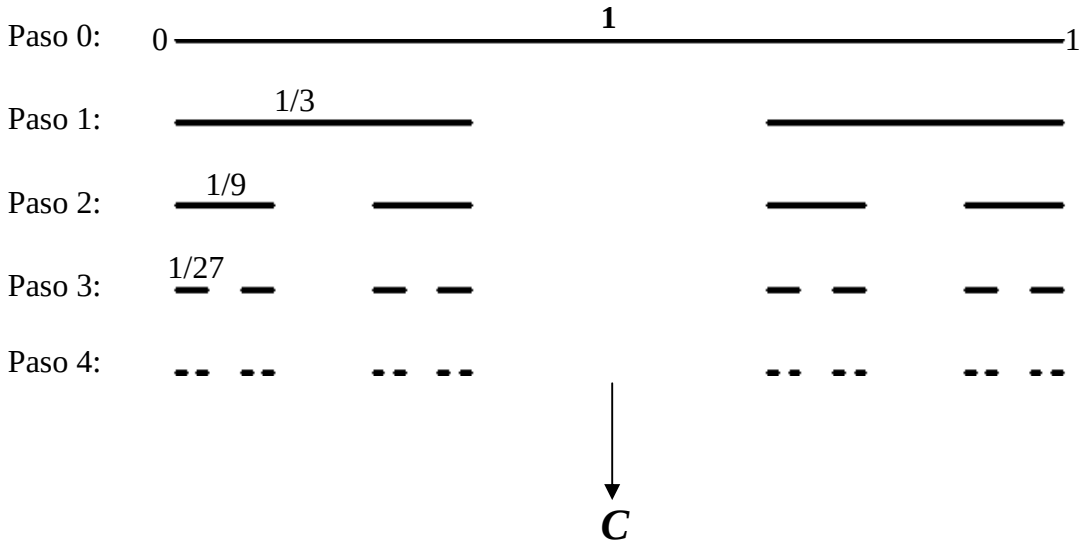
Conjuntos fractales. Dimensión fractal.

Miguel Reyes

Mayo 2006

Conjunto clásico de Cantor (G. Cantor, 1883)

Se llama **conjunto clásico de Cantor** al conjunto C que se obtiene después de aplicar el siguiente proceso infinito que consiste en eliminar, de cada intervalo, el intervalo abierto central de longitud un tercio del intervalo original:



Los puntos extremos de los intervalos que generan el conjunto de Cantor nunca se quitan, por lo que el conjunto de Cantor contiene una cantidad infinita de puntos:

$$\left\{0,1,\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{9},\frac{2}{9},\frac{7}{9},\frac{8}{9},\ldots\right\}\subset C$$

Sin embargo su longitud es cero, como queda de manifiesto con el siguiente razonamiento:

¿Cuál es la longitud del intervalo que se quita en el paso 1?	
¿Cuál es la suma de las longitudes de los intervalos que se quitan en el paso 2?	
¿Cuál es la suma de las longitudes de los intervalos que se quitan en el paso 3?	
¿Cuál es la suma de las longitudes de los intervalos que se quitan en el paso 4?	
¿Cuál es la suma de las longitudes de los intervalos que se quitan en el paso k?	
¿Cuál es la suma de las longitudes de todos lo intervalos que se quitan?	
¿Cuál es la longitud del conjunto de Cantor?	

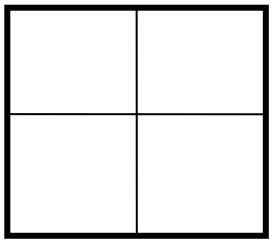
Este conjunto de Cantor tiene, entre otras, las siguientes propiedades:

- Su longitud es cero, pero tiene tantos puntos como toda la recta real.
- Es un conjunto totalmente disconexo: entre cada dos puntos siempre hay infinitos puntos que no pertenecen al conjunto.
- Está formado por aquellos puntos del intervalo unidad cuya expresión en base 3 no contienen el dígito 1.

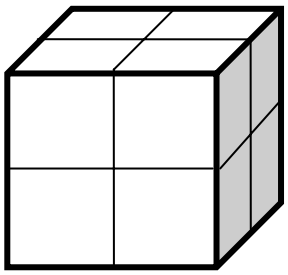
Dimensión fractal (dimensión de autosemejanza)

Un intervalo es la unión de dos intervalos semejantes de razón 1/2, un cuadrado es la unión de cuatro cuadrados semejantes de razón 1/2, un cubo es la unión de 8 cubos semejantes de razón 1/2, y así sucesivamente:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^1=2\left(\frac{1}{2}\right)^1=1$$



$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=4\left(\frac{1}{2}\right)^2=1$$



$$\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^3=8\left(\frac{1}{2}\right)^3=1$$

Observa que los exponentes de las potencias coinciden con la dimensión del conjunto (1 para el intervalo, 2 para el cuadrado y 3 para el cubo).

El conjunto de Cantor está formado por dos partes que son semejantes al total de razón 1/3 y, en este caso, la potencia adecuada es:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^s+\left(\frac{1}{3}\right)^s=1 \;\Rightarrow\; 2\frac{1}{3^s}=1 \;\Rightarrow\; 3^s=2 \;\Rightarrow\; s=\log_3 2=\frac{\log 2}{\log 3}=0,6309\ldots$$

Esta potencia se llama **dimensión fractal** del conjunto de Cantor, y se representa:

$$\dim C = s = 0,6309...$$

Observa que esta dimensión concuerda con los datos que se conocen del conjunto de Cantor, ya que es más grande que un conjunto numerable de puntos (dimensión 0) y más pequeño que un segmento (dimensión 1).

En general, si un conjunto E es la unión de n partes semejantes con razones $\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$, se llama **dimensión fractal** (dimensión de autosemejanza) de E al único número s que verifica:

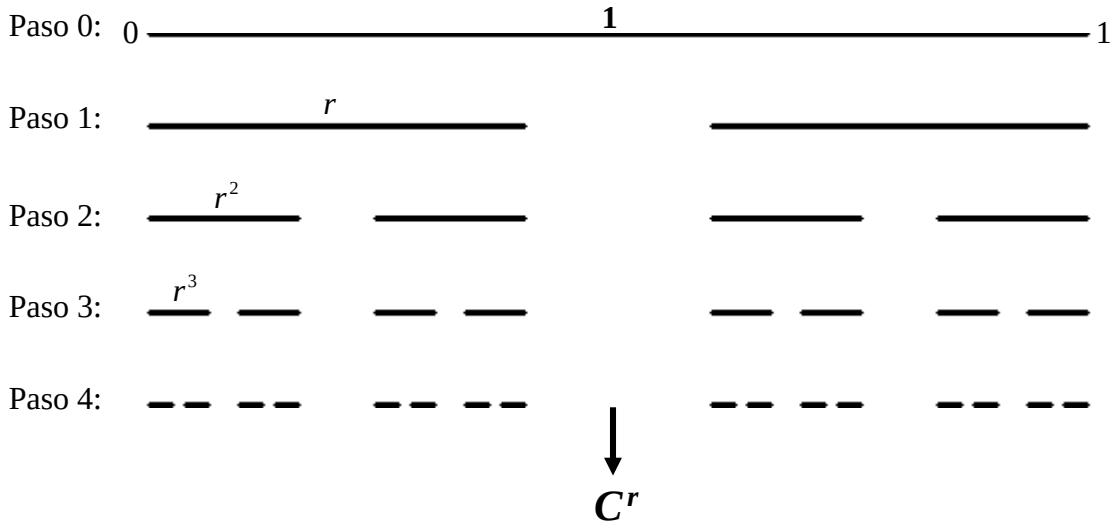
$$r_1^s + r_2^s + \ldots + r_n^s = 1$$

En el caso particular de que todas las partes sean de la misma razón r, la dimensión fractal es:

$$r_1^s + r_2^s + \ldots + r_n^s = nr^s = 1 \;\Rightarrow\; \left(\frac{1}{r}\right)^s = n \;\Rightarrow\; s = \log_{1/r} n = \frac{\log n}{\log(1/r)}$$

Conjuntos lineales generalizados de Cantor

Si se hace la misma construcción del conjunto clásico de Cantor sustituyendo la razón 1/3 por una razón arbitraria r, $0 < r < 1/2$, se obtienen conjuntos con las mismas propiedades pero diferente dimensión fractal.



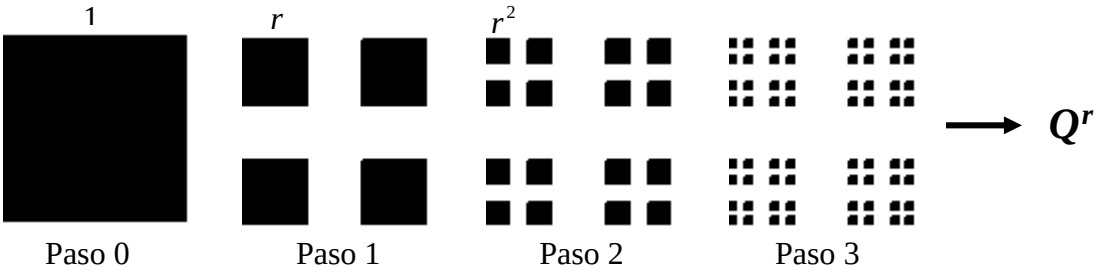
Este conjunto tiene las mismas propiedades del conjunto clásico de Cantor, pero su dimensión, que siempre está comprendida entre 0 y 1, es diferente:

$$\dim C^r = \frac{\log 2}{\log(1/r)} = \frac{\log 2}{-\log r}$$

¿Cuál es la longitud del conjunto en el paso 1?	
¿Cuál es la longitud del conjunto en el paso 2?	
¿Cuál es la longitud del conjunto en el paso 3?	
¿Cuál es la longitud del conjunto en el paso *k*?	
¿Cuál es la longitud del conjunto final?	
¿Qué conjunto se obtiene para $r = 0$?	
¿ Qué conjunto se obtiene para $r = 1/2$?	

Conjuntos planos de Cantor

Son los que se obtienen al aplicar el siguiente proceso infinito:

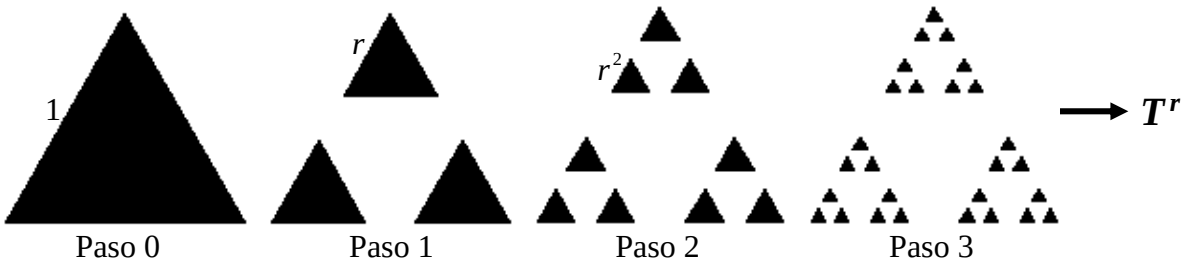


donde $0 < r < 1/2$ es arbitrario.

¿Cuál es el conjunto en el paso *k*? ¿Qué elementos lo forman?	
¿Cuál es el área del conjunto en el paso *k*?	
¿Cuál es el área del conjunto final?	
¿Cuál es el perímetro del conjunto en el paso *k*?	
¿Para qué valores de *r* es cero el perímetro del conjunto final?	
¿Para qué valores de *r* es infinito el perímetro del conjunto final?	
¿Para qué valor de *r* es finito y positivo el perímetro final?	
¿Cuál es (en función de *r*) la dimensión fractal del conjunto?	
Relaciona los valores de la dimensión con los del área y perímetro	
¿Qué conjunto se obtiene para $r = 0$?	
¿ Qué conjunto se obtiene para $r = 1/2$?	

El triángulo de Sierpinski

Es el que se obtiene al aplicar el siguiente proceso infinito:



donde $0 < r < 1/2$ es arbitrario.

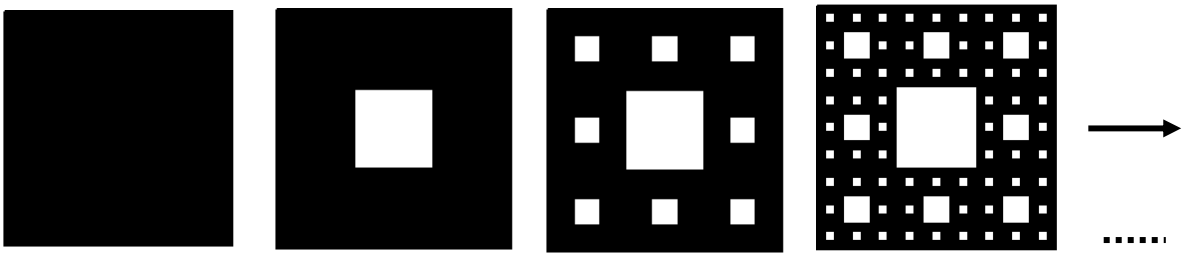
¿Cuál es el conjunto en el paso *k*? ¿Qué elementos lo forman?	

¿Cuál es el área del conjunto en el paso *k*?	
¿Cuál es el área del conjunto final?	
¿Cuál es el perímetro del conjunto en el paso *k*?	
¿Para qué valores de *r* es cero el perímetro del conjunto final?	
¿Para qué valores de *r* es infinito el perímetro del conjunto final?	
¿Para qué valor de *r* es finito y positivo el perímetro final?	
¿Cuál es (en función de *r*) la dimensión fractal del conjunto?	
Relaciona los valores de la dimensión con los del área y perímetro	

Es especialmente conocido el triángulo de Sierpinski que se obtiene para $r = 1/2$:

La alfombra de Sierpinski

Es el conjunto que se obtiene al aplicar el siguiente proceso infinito

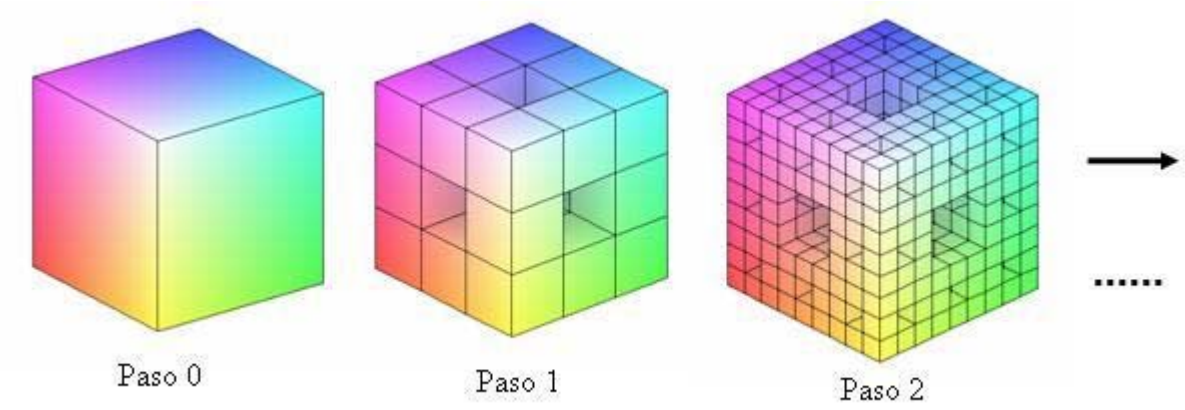


Paso 0 Paso 1 Paso 2 Paso 3

¿Cuál es el área que se quita en el paso 1?	
¿Cuál es el área que se quita en el paso 2?	
¿Cuál es el área que se quita en el paso 3?	
¿Cuál es el área que se quita en el paso *k*?	
¿Cuál es el área total que se quita en todo el proceso (infinito)?	
¿Cuál es el área de la alfombra de Sierpinski?	
¿Cuál es la dimensión fractal de la alfombra de Sierpinski?	

La esponja de Menger

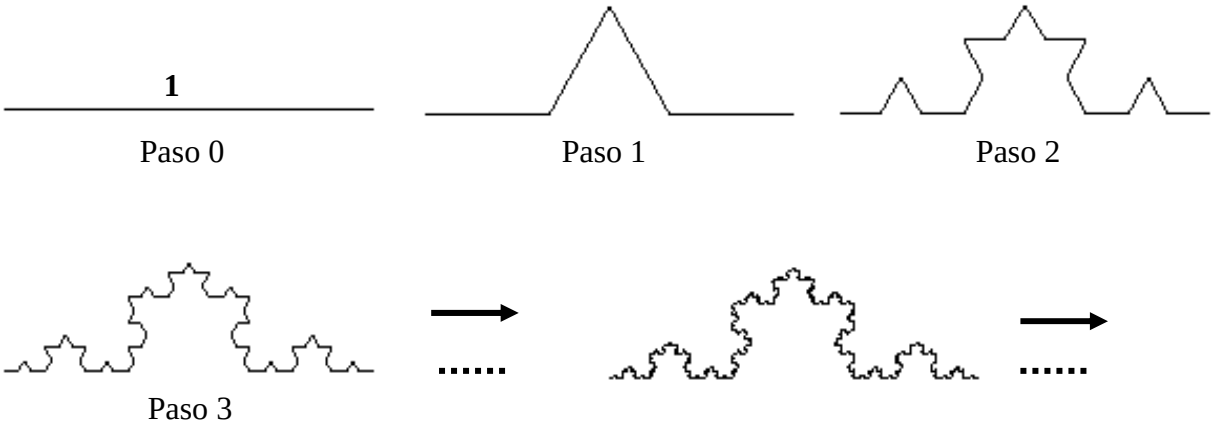
Una construcción similar a la que obtiene la alfombra de Sierpinski, realizada en tres dimensiones da lugar a la esponja de Menger:



¿Cuál es el volumen que se quita en el paso 1?	
¿Cuál es el volumen que se quita en el paso 2?	
¿Cuál es el volumen que se quita en el paso 3?	
¿Cuál es el volumen que se quita en el paso *k*?	
¿Cuál es el volumen total que se quita en todo el proceso (infinito)?	
¿Cuál es el volumen de la esponja de Menger?	
¿Cuál es la dimensión fractal de la esponja de Menger?	

La curva de Koch

Es la curva que se obtiene al aplicar el siguiente proceso infinito:



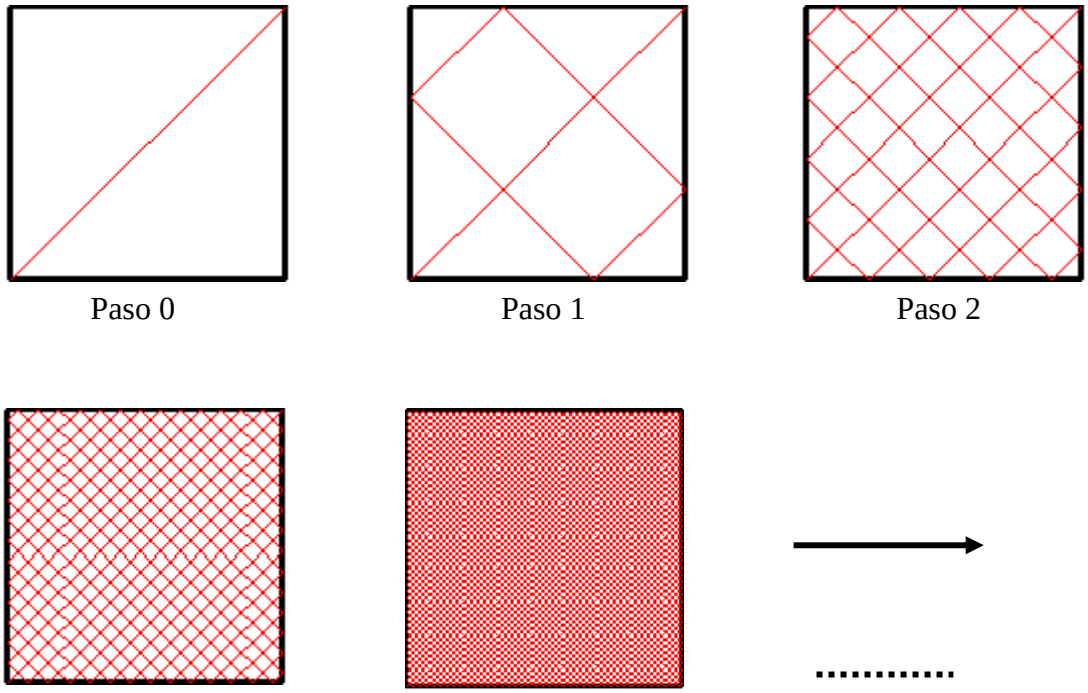
La curva de Koch tiene, entre otras, las siguientes propiedades:

- Es una curva de longitud infinita. Además, la longitud entre dos cualesquiera de sus puntos es también infinita.
- Barre área cero.
- No tiene tangente en ninguno de sus puntos.

¿Cuál es la longitud de la curva en el paso 1?	
¿Cuál es la longitud de la curva en el paso 2?	
¿Cuál es la longitud de la curva en el paso 3?	
¿Cuál es la longitud de la curva en el paso *k*?	
¿Cuál es la longitud total de la curva de Koch?	
¿Cuál es la dimensión fractal de la curva de Koch?	

La curva de Peano

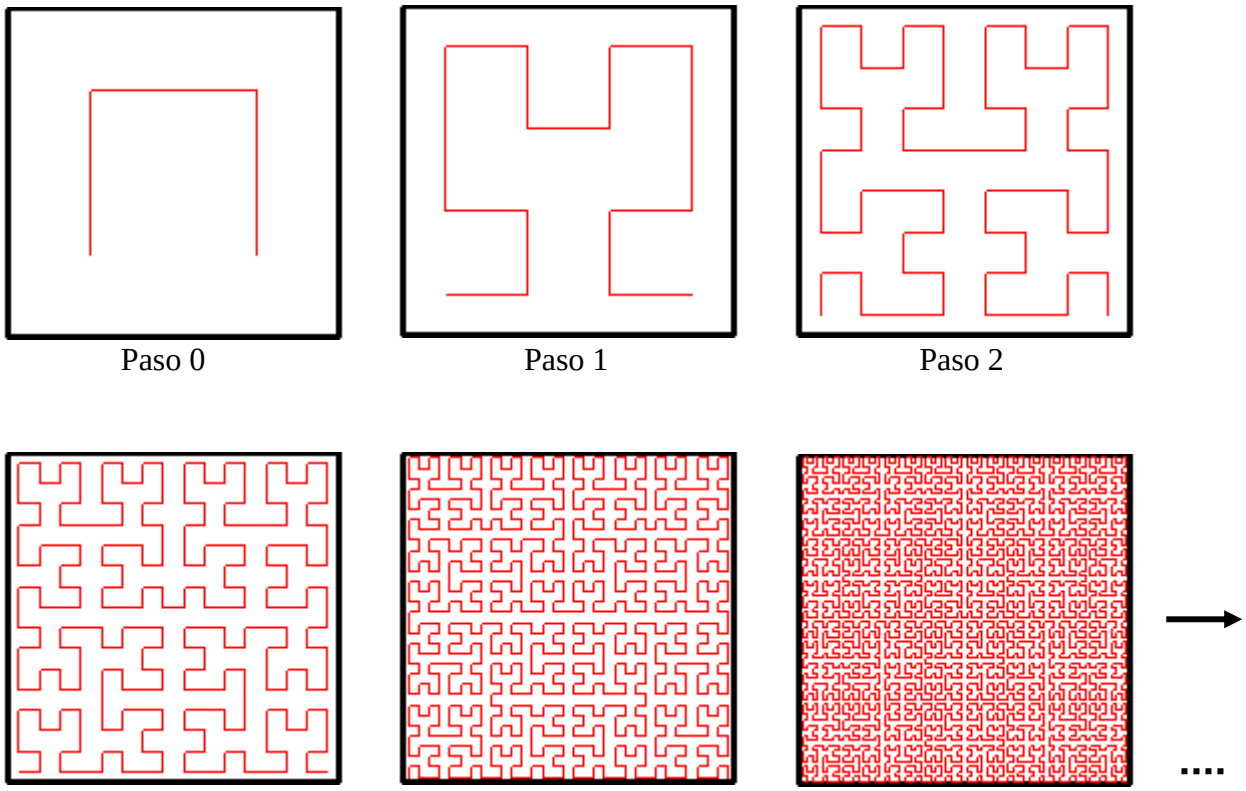
Es la curva que se obtiene al aplicar el siguiente proceso infinito:



En el límite la curva pasa por todos los puntos del cuadrado unidad, es decir, la curva de Peano **tiene área 1**.

Curva de Hilbert

Es la curva que se obtiene al aplicar el siguiente proceso infinito:



Paso 0 Paso 1 Paso 2

Paso 3 Paso 4 Paso 5 ....

Como en el caso de la curva de Peano, la curva de Hilbert pasa por todos los puntos del cuadrado unidad, es decir, la curva de Hilbert **tiene área 1**.