Dinámica compleja

Conjuntos de Julia y Mandelbrot. Método de Newton.

Miguel Reyes

Mayo 2006

Los números complejos

Los **números complejos** son los números de la forma

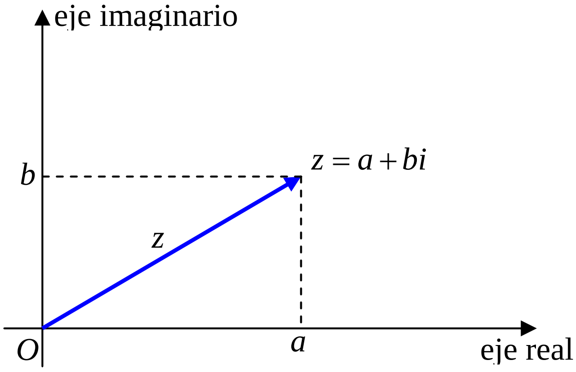
$$z = a + bi$$

donde a y b son números reales e $i = \sqrt{-1}$ es la **unidad imaginaria**.

En el campo de los números complejos todas las ecuaciones polinómicas tienen solución, en particular las ecuaciones de segundo grado:

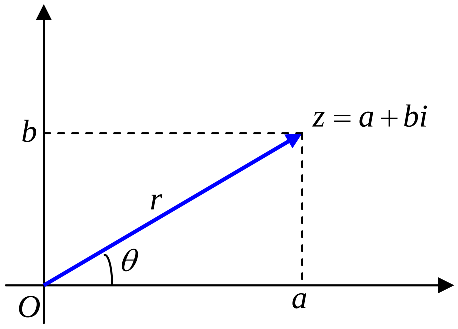
$$z^2 - 4z + 13 = 0 \;\Rightarrow\; z = \frac{4 \pm \sqrt{16-52}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{36}\sqrt{-1}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i$$

Los números complejos se representan en el plano que, cuando se usa para ello, se llama **plano complejo**:



$$z = a + bi \quad \begin{cases} a \equiv \text{ parte real} \\ b \equiv \text{ parte imaginaria} \end{cases}$$

Además de por sus partes real e imaginaria, los números complejos quedan unívocamente determinados por su **módulo** y su **argumento**:

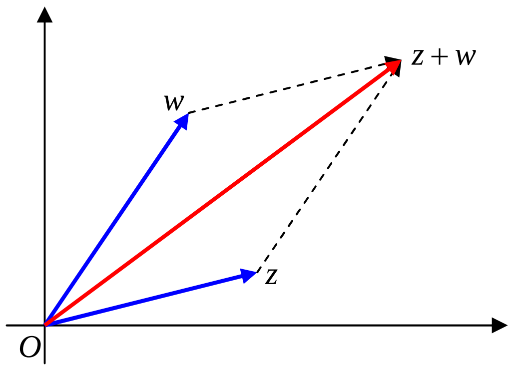


forma binómica: $z = a + bi$

forma polar: $z = r_\theta \equiv \begin{cases} r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} & \text{(modulo)} \\ \tan\theta = \dfrac{b}{a} & \text{(argumento)} \end{cases}$

Operaciones con números complejos

Suma y diferencia:



Por ejemplo:

$$(2-3i)+(3+4i)=(2+3)+(-3+4)i=5+i$$

En general:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$
$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$$

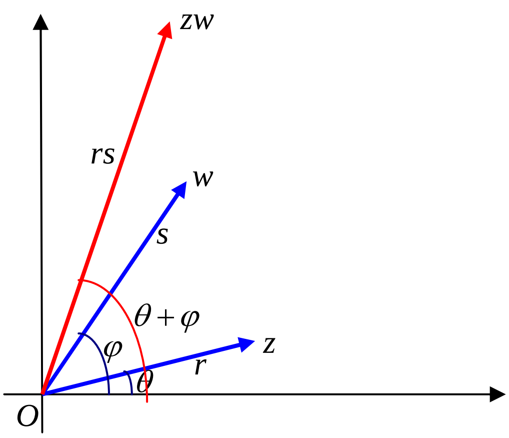
Producto y cociente:

En forma binómica se operan como binomios teniendo en cuenta que $i^2=-1$. Por ejemplo:

$$(2-3i)(3+4i)=2(3+4i)-3i(3+4i)=6+8i-9i-12i^2=6+8i-9i+12=18-i$$

$$\frac{2-3i}{3+4i}=\frac{(2-3i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=\frac{6-8i-9i+12i^2}{9-16i^2}=\frac{6-8i-9i-12}{9+16}=\frac{-6-17i}{25}=-\frac{6}{25}-\frac{17}{25}i$$

En forma polar, estas operaciones son más simples:



$$\begin{cases} z=r_\theta \\ w=s_\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{producto: } zw=rs_{\theta+\varphi} \\ \text{cociente: } \dfrac{z}{w}=\left(\dfrac{r}{s}\right)_{\theta-\varphi} \end{cases}$$

Potencias:

Usando módulo y argumento, el cálculo de potencias es sencillo:

$$z=r_\theta \quad \Rightarrow \quad z^n=\left(r^n\right)_{n\theta}$$

De aquí, se deduce que:

$$\begin{array}{l} 0\le |z|<1 \ \Rightarrow\ |z^n|=|z|^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \\ |z|>1 \ \Rightarrow\ |z^n|=|z|^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \end{array} \quad \text{y} \quad |z|=1 \ \Rightarrow\ |z^n|=|z|^n=1 \text{, para todo } n$$

El sistema dinámico $f(z) = z^2$

La órbita que sigue el punto z_0 en este sistema dinámico es:

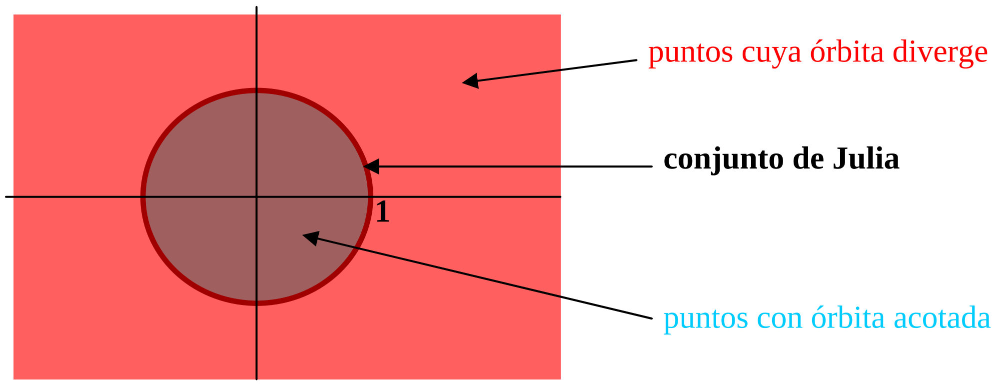
$$\{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, \ldots\} \quad \text{donde} \quad \begin{cases} z_1 = f(z_0) = z_0^2 \\ z_2 = f(z_1) = z_1^2 = z_0^4 \\ z_3 = f(z_2) = z_2^2 = z_0^8 \\ \quad \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Halla la órbita de $z_0 = 1 + i$. ¿Hacia donde se dirige?	
Halla la órbita de $z_0 = (1+i)/2$. ¿Hacia donde se dirige?	
Halla la órbita de $z_0 = -i$. ¿Hacia donde se dirige?	
Encuentra una expresión general para z_n en función de z_0 .	
Expresa el módulo de z_n en función del módulo de z_0 .	
¿Hacia donde se dirige la órbita de un número complejo z_0 con $0 \le \lvert z_0 \rvert < 1$?	
¿Hacia donde se dirige la órbita de un número complejo z_0 con $\lvert z_0 \rvert > 1$?	
¿Hacia donde se dirige la órbita de un número complejo z_0 con $\lvert z_0 \rvert = 1$?	
Con la expresión obtenida, justifica los resultados obtenidos para las órbitas.	

Este sistema dinámico permite obtener una expresión general para cualquier término de la órbita en función del primero:

$$z_n = f^{\circ n}(z_0) = z_0^{2^n} \qquad \text{de donde se deduce que:} \qquad \lvert z_n \rvert = \lvert z_0 \rvert^{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{, si } 0 \le \lvert z_0 \rvert < 1 \\ \infty & \text{, si } \lvert z_0 \rvert > 1 \end{cases}$$

mientras que si $\lvert z_0 \rvert = 1$ la órbita se queda atrapada en la circunferencia unidad. Este conjunto de puntos, que son frontera entre los que su órbita diverge y los que su órbita permanece acotada se llama **conjunto de Julia** del sistema dinámico.

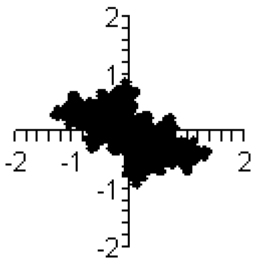


Los sistemas dinámicos $f(z) = z^2 + c$

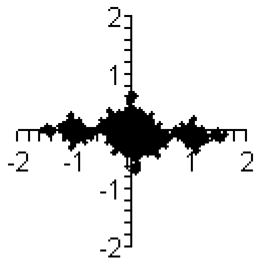
Para cada valor del número complejo c hay un sistema dinámico, y la órbita que sigue el punto z_0 en dicho sistema dinámico es:

$$\{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, \ldots\} \quad \text{donde} \quad \begin{cases} z_1 = f(z_0) = z_0^2 + c \\ z_2 = f(z_1) = z_1^2 + c = \left(z_0^2 + c\right)^2 + c \\ z_3 = f(z_2) = z_2^2 + c = \left[\left(z_0^2 + c\right)^2 + c\right]^2 + c \\ \quad \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

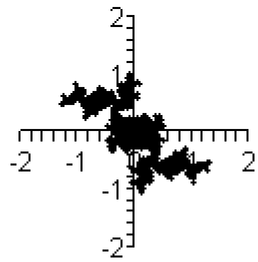
En este caso, si $c \neq 0$, no se puede obtener una expresión general para cualquier término de la órbita en función del primero y, por tanto, es muco más difícil conocer la órbita de los puntos del plano complejo. Sin embargo, la situación es parecida al caso $c = 0$: hay puntos cuya órbita diverge a infinito y puntos cuya órbita permanece atrapada en un conjunto acotado, siendo la frontera entre unos y otros puntos el conjunto de Julia asociado al sistema dinámico correspondiente. A continuación aparecen los conjuntos de Julia asociados a varios sistemas dinámicos:



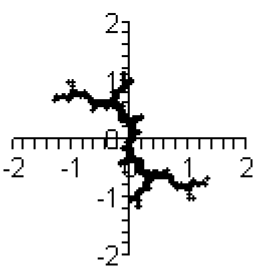
$c = -0.5 + 0.5i$



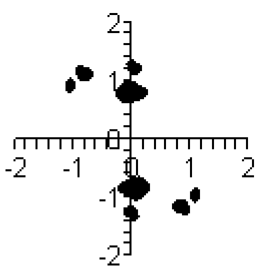
$c = -1.1 + 0.1i$



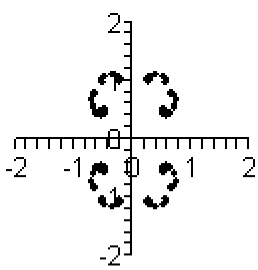
$c = -0.2 + 0.75i$



$c = i$



$c = 0.66i$



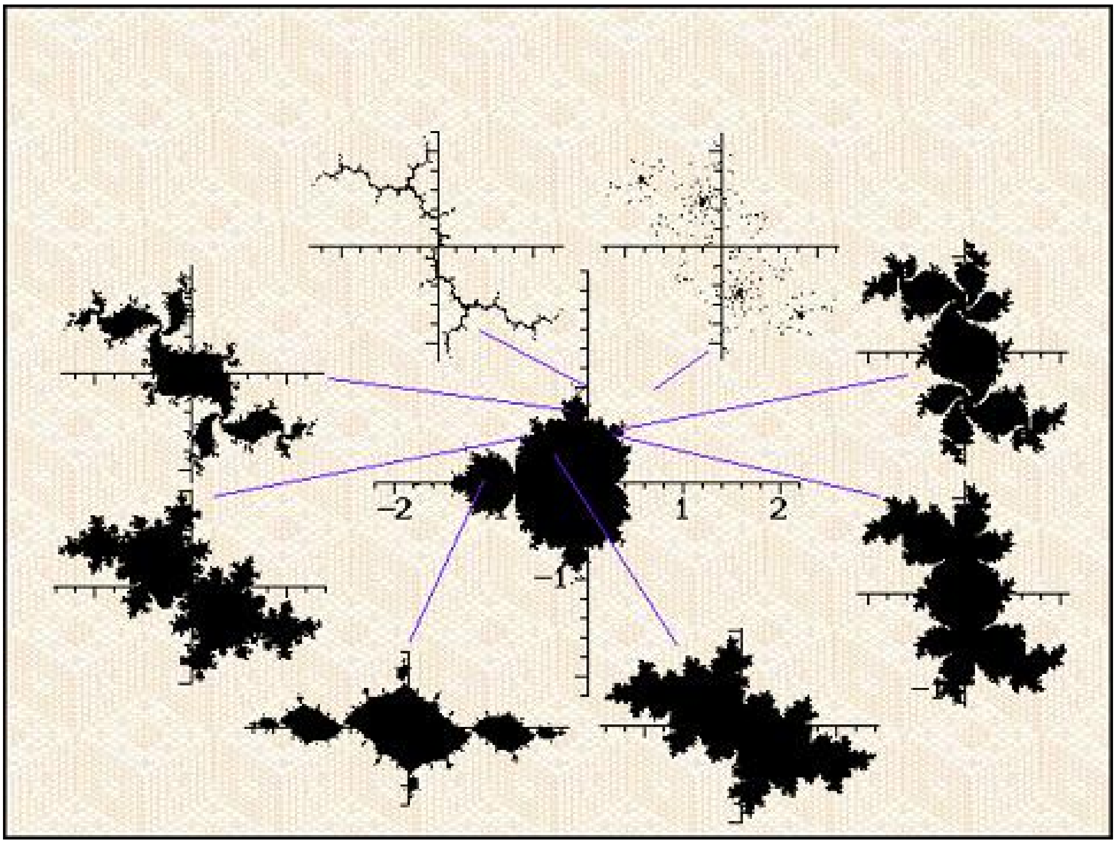
$c = 0.5$

Tantos los conjuntos de Julia obtenidos aquí, como todos los posibles, se pueden clasificar en uno de los dos tipos siguientes:

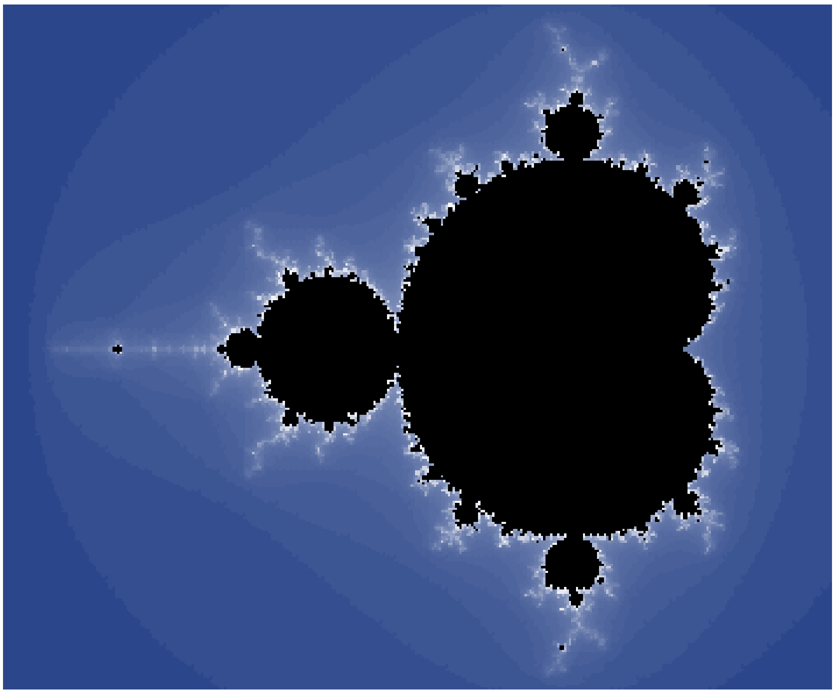
- **Conexos**: todos sus puntos están unidos por puntos del conjunto.
- **Disconexos**: no hay dos puntos que se puedan unir por puntos del conjunto.

El conjunto de Mandelbrot

Es el conjunto de todos los números complejos c para los que es conexo el conjunto de Julia asociado al sistema dinámico $f(z) = z^2 + c$.



El conjunto de Cantor es conexo con frontera fractal:



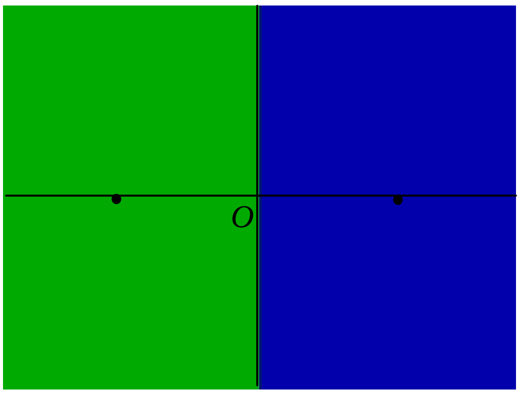
El método de Newton

El teorema fundamental del álgebra afirma que todo polinomio $p(z)$ de grado n tiene exactamente n raíces, contando su multiplicidad.

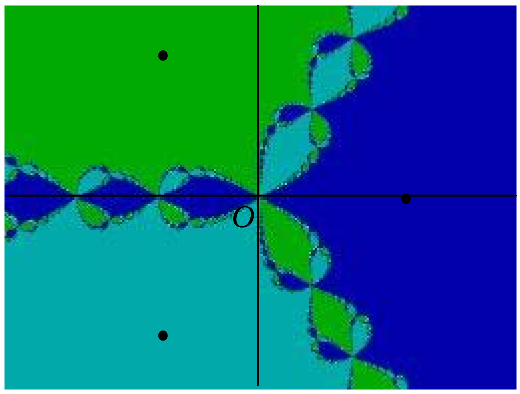
El método de Newton es un método que permite obtener las raíces del polinomio $p(z)$ como puntos atractivos de las órbitas del sistema dinámico asociado a la función

$$Np(z) = z - \frac{p(z)}{p'(z)}$$

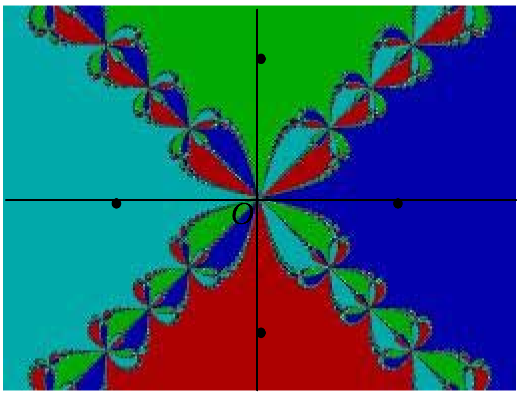
Es decir, cada órbita de este sistema dinámico converge a una de la raíces, y las regiones de atracción de cada una de sus raíces suelen tener estructura fractal.



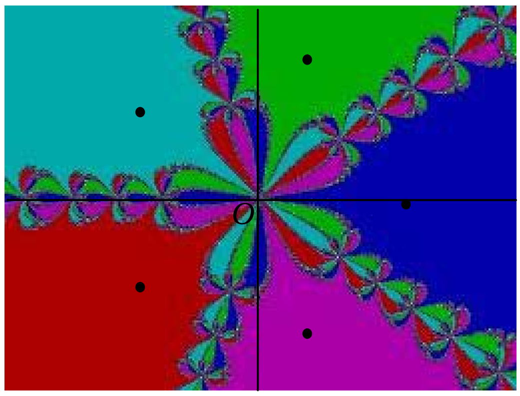
Regiones de atracción de la raíces del polinomio $p(z) = z^2 - 1$, que son: ± 1



Regiones de atracción de la raíces del polinomio $p(z) = z^3 - 1$, que son: 1 y $\frac{-1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$



Regiones de atracción de la raíces del polinomio $p(z) = z^4 - 1$, que son: ± 1 y $\pm i$



Regiones de atracción de la raíces del polinomio $p(z) = z^5 - 1$.