Miguel Reyes

Sistemas Dinámicos I

Introducción, leyes de crecimiento y puntos de equilibrio

1. Usa tu calculadora para, partiendo de cierto número positivo inicial, pulsar repetidamente la tecla *cuadrado* (x^2). ¿Qué ocurre? Repite el proceso para otros valores iniciales.

2. Usa tu calculadora para, partiendo de cierto número positivo inicial, pulsar repetidamente la tecla *raíz cuadrada* ($\sqrt{x}$). ¿Qué ocurre? Repite el proceso para diferentes valores iniciales.

Un **sistema dinámico** está formado por un conjunto X y una función f que aplica el conjunto X en sí mismo, llamada **función de transición**. La **órbita** de un punto inicial $x_0 \in X$ es el resultado de aplicar iterativamente la función de transición:

$$x_0,\quad x_1 = f(x_0),\quad x_2 = f(x_1),\quad x_3 = f(x_2), \dots\dots\dots \qquad \text{En general: } x_{n+1} = f(x_n)$$

Estudiar un sistema dinámico es estudiar la órbita de todos los puntos del espacio de fases.

Un **punto fijo** $a \in X$ es aquel que verifica que $f(a) = a$, y su órbita es: $a, a, a, \dots$. Los puntos fijos de un sistema dinámico son las soluciones de la ecuación $f(x) = x$.

Un **punto fijo atractivo** es el que atrae las órbitas de los puntos cercanos, y un **punto fijo repulsivo** es el que las repele. Los puntos fijos atractivos se pueden determinar a través de las órbitas de los puntos cercanos.

3. Halla y clasifica los puntos fijos de las funciones x^2 y $\sqrt{x}$, y clasifícalos.

4. Considera la función de transición

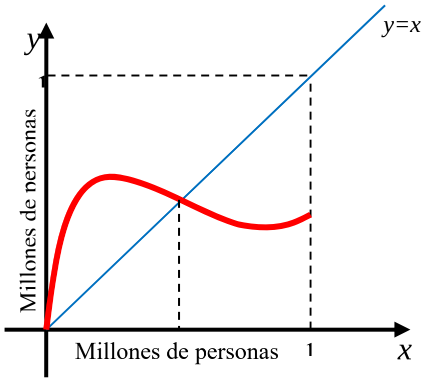
$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{x}{2}$$

Halla la órbita de un punto inicial positivo. ¿Hacia dónde converge?

5. Repite el ejercicio anterior con las funciones

$$f(x) = \frac{3}{2x} + \frac{x}{2} \qquad y \qquad f(x) = \frac{a}{2x} + \frac{x}{2}\,,\quad a > 0$$

6. La siguiente gráfica representa una estimación sobre el número de personas que cierto año cogerán el virus de la gripe en función de las personas que lo cogieron el año anterior:

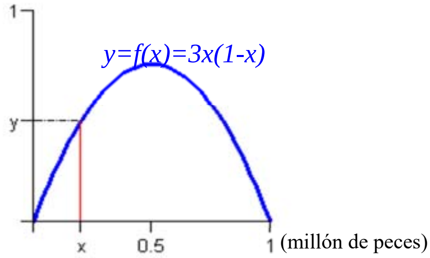


Si este año nadie cogen el virus, ¿cuántos lo cogen el año que próximo?	
Si este año todos cogen el virus, ¿cuántos lo cogen el año que próximo?	
¿Cuándo permanece estable el número de personas que cogen el virus?	
¿Cuándo crece el número de personas que cogen el virus?	
¿Cuándo disminuye el número de personas que cogen el virus?	

7. (**Modelo de Malthus**) Cierta población tiene x_0 individuos en un instante inicial, y se estima que el crecimiento anual de la población es del 20%.

- Estudia la evolución futura de la población.
- Expresa en número de individuos en el año k en función de la población inicial. Justifica con ello la evolución futura de la población.
- Repite los pasos anteriores si se estima que la población decrece anualmente un 5%.

8. Una especie de peces se reproduce de forma que si este año la cantidad de peces es x, el año próximo será y, donde y viene dada por la función asociada a la curva de la figura.



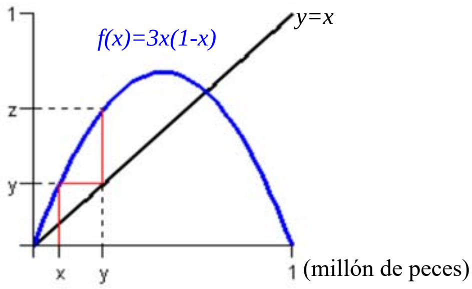
Si este año no hay peces, ¿cuántos habrá el próximo año?	
Si este año hay 1 millón de peces, ¿cuántos habrá el próximo año?	
Si este año hay 100.000 peces, ¿cuántos habrá el próximo año?	
¿Cuál es la cantidad de peces que da una cantidad máxima el próximo año?	
¿Cuántos peces debe haber para que la población sea la misma el año próximo?	
¿Cuántos peces debe haber para que aumente la población el año próximo?	
¿Cuántos peces debe haber para que disminuya la población el año próximo?	

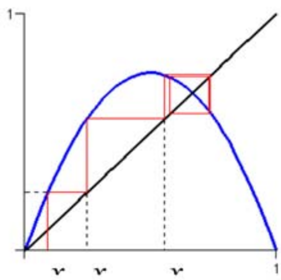
9. Llamando x_k a la cantidad de peces que hay en el año k, la dinámica de la población de peces (también llamada **órbita**) se puede presentar en una tabla del tipo:

Año	0	1	2	3	…	k	$k+1$	…
Cantidad de peces	x_0	x_1	x_2	x_3	…	x_k	x_{k+1}	…

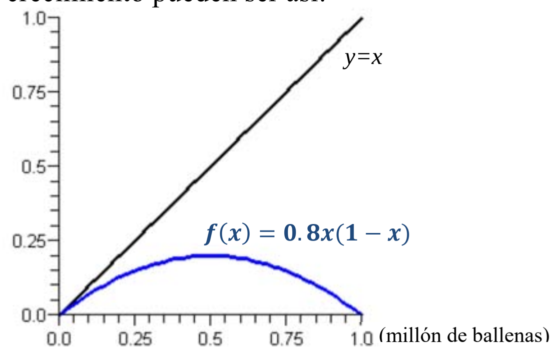
donde el número de peces que hay cada año se obtiene aplicando la función f al número de peces que había el año anterior: $x_{k+1} = f(x_k)$ (**ecuación** del sistema dinámico)

Si este año hay x_0 peces, el año próximo habrá $x_1 = f(x_0)$ peces, dentro de dos años habrá $x_2 = f(x_1)$ peces, y así sucesivamente.





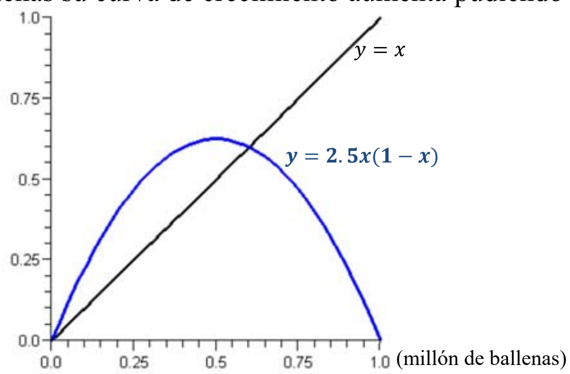
10. Las ballenas y otras especies animales tienen curvas de crecimiento muy lento. En el caso de que se caza libre sus curvas de crecimiento pueden ser así:



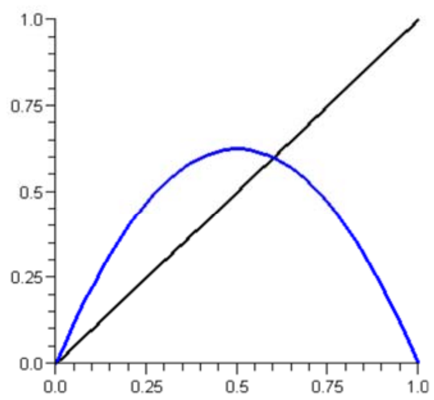
Partiendo de una población inicial de medio millón de ballenas:

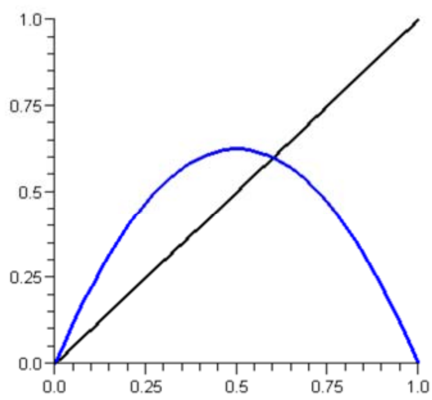
¿Cuántas habrá al cabo de cuatro años?	
¿Cuántas habrá a más largo plazo (dentro de 10 o 20 años)?	

11. Si se prohíbe la caza de ballenas su curva de crecimiento aumenta pudiendo ser así



Partiendo de 100.000 ballenas, ¿cuántas habrá a largo plazo?	
Partiendo de 100 ballenas, ¿cuántas habrá a largo plazo?	
Partiendo de 900.000 ballenas, ¿cuántas habrá a largo plazo?	
¿Para qué número de ballenas la población crece al año próximo?	
¿Para qué número de ballenas la población decrece al año próximo?	
¿Para qué número de ballenas la población permanece estable?	





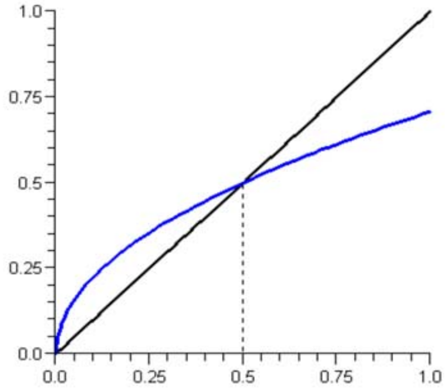
12. Un sistema dinámico como, por ejemplo, la población de una especie animal, se dice que esta en **equilibrio** cuando se estabiliza, es decir, cuando su población permanece constante. El sistema dinámico de ecuación f estará en equilibrio para la población x que verifica:

$$f(x) = x$$

llamada **población o punto de equilibrio** y, en términos matemáticos, **punto fijo**.

Encuentra los puntos de equilibrio del sistema de la actividad 5	
Encuentra los puntos de equilibrio del sistema de la actividad 6	

13. Cierta población de peces tiene una curva de crecimiento como la de la figura:



En este sistema dinámico $x = 0$ y $x = 0.5$ son puntos de equilibrio, es decir, que si la población inicial es de cero peces o de medio millón de peces, dicha población permanece estable. El comportamiento del sistema alrededor de dichos puntos es bien diferente como puedes poner de manifiesto contestando a las siguientes preguntas:

Una población estable de medio millón de peces disminuye ligeramente por cierto vertido contaminante. ¿Qué ocurre a largo plazo?	
Una población estable de medio millón de peces aumenta ligeramente por un año de cría excepcional. ¿Qué ocurre a largo plazo?	
En un ecosistema sin peces se introduces varios ejemplares. ¿Qué ocurre a largo plazo?	
Por motivos extraordinarios, un ecosistema se satura de peces. ¿Qué ocurre a largo plazo?	

14. Un punto de equilibrio de un sistema dinámico se dice que es **estable** cuando al alterarlo ligeramente la población se vuelve a acercar a dicho punto; y se dice que es **inestable** cuando al alterarlo ligeramente la población se aleja de dicho punto.

Contesta si los siguientes puntos de equilibrio son estables o inestables:

El punto de equilibrio $x = 0$ de la actividad 13	
El punto de equilibrio $x = 0.5$ de la actividad 13	
Los puntos de equilibrio de la actividad 10	
Los puntos de equilibrio de la actividad 11	