Números consecutivos.
Sábado 8 de Marzo de 2002

Problema 2. Se puede encontrar una sucesión de números enteros consecutivos cuya suma sea $1{,}000$. Dicha sucesión, si existe ,¿ es única?

Se trata de encontrar números $a, a+1, a+2 \ldots a+k$, tales que: $a+(a+1)+(a+2)+\ldots(a+k) = 1000$. Cuando lo hayamos resuelto nos gustará saber si la solución es única.

Ejercicio

Intenta el Problema 2 cambiando $1{,}000$ por:

(a) 20, (b) 30, (c) 40, (d) 100.

Se trata de encontrar a y k enteros positivos que verifiquen $a+(a+1)+(a+2)+\ldots(a+k) = 1000$; pero $a+(a+1)+(a+2)+\ldots(a+k) = \frac{1}{2}(2a+k)(k+1)$. Es decir $(2a+k)(k+1) = 2000$. Esto hace las cosas mucho más fáciles. Puesto que $(k+1)$ es un factor del lado de la izquierda de la igualdad, también debería ser factor del lado derecho de la ecuación. Así $k+1 = 1, 2, 4, 5, 8, 10 \ldots$. Parece que hay muchos casos.

Ejercicio

Reduce el problema anterior cambiando $1{,}000$ por:

(a) 50, (b) 80. Vemos que algunos tienen un único conjunto de números y otros más de uno.

Parece que hay dos razones por las que no podemos resolver la ecuación

$$2a+k = \frac{2000}{k+1},$$

o bien un problema de paridad, o bien un problema de divisibilidad. Si $k+1$ es par, entonces ambos, k y $2a+k$, son impares. Los únicos posibles valores , además de 1, son 5, 25 y 125.

Si $2a+k=5$, entonces $k+1=400$. Claramente no hay ningún valor que para esto.

Si $2a+k=25$, entonces $k+1=80$. De nuevo no hay solución.

Si $2a+k=125$, entonces $k+1=16$. Es decir $a=55$ Esto significa que hemos encontrado una solución $55, 56, \ldots, 70$

Pero qué sucede si $k+1$ es impar. Entonces:

$k+1=5,\quad 2a+k=400\quad 198, 199, 200, 201, 201$

$k+1=25,\quad 2a+24=80\quad 28, 29\ldots, 52$

$k+1=125,\quad 2a+124=16.$

La clave está en saber que si $k+1$ es impar, entonces $2a+k$ es par, mientras que si $k+1$ es par entonces $2a+k$ es impar.

Ejercicio

1. Escribe todas las soluciones del problema anterior.

2. Generaliza. Encuentra que números se pueden poner como la suma de una serie de números consecutivos. ¿Habrá números que no son suma de ningún conjunto de números consecutivos?.