

**Un problema de medidas.  
Sábado 24 de Diciembre de 2001**

**Problema 1.** Con una jarra de 3 litros y otra de 5 litros, podemos medir exactamente 7 litros de agua?

Seguro que ya has pensado esta cuestión con anterioridad, o bien en otra parecida y puedes resolverla rápidamente: es muy fácil tener 3, 6, 9 etc. litros utilizando la jarra de 3 litros y 5, 10 o 15 etc. litros con la jarra de 5 litros. Está claro que si encuentro  $a$  y  $b$  enteros que verifiquen la relación  $7 = 3a + 5b$  estará resuelto el problema.

Primero llenamos la jarra de 3 litros y la echamos en la de 5 litros, después volvemos a llenar la jarra de 3 litros y echamos su contenido en la otra hasta que se llene; de este modo en la jarra pequeña nos hemos quedado con 1 litro. Si repetimos este proceso 7 veces, habremos medido exactamente 7 litros .

**Ejercicio:**

1. Encuentra un proceso más eficiente para obtener 7 litros.

**¿Cómo resolver problemas?**

Hemos puesto un problema y hemos obtenido una solución, sin embargo es muy rudimentaria.

La investigación matemática y la resolución de problemas difieren esencialmente en un aspecto: en la resolución de problemas el problema está propuesto con precisión y hay una respuesta definida (que es conocida por alguien). Todos los demás pasos entre el problema y la solución son comunes a ambas.

Vamos a analizar algunos de los elementos que intervienen en la resolución de problemas:

- A. LEER y COMPRENDER.** Es necesario leer el problema varias veces. Probablemente, en un principio necesites leerlo dos o tres veces hasta darte cuenta de lo que necesitas. ¿Cuáles son las palabras clave en un problema?. Es una cuestión difícil de responder, especialmente en una primera lectura, sin embargo, hay un consejo útil: cambia una palabra o una frase en el problema; si esto cambia el problema entonces la palabra o frase es importante. En el problema propuesto si se cambia jarra por vaso el problema no cambia; sin embargo si se cambia 3 por 17, al menos la solución del problema sera distinta aunque, quizás, no cambie la forma de resolución.
- B. ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN** En este punto no está nada claro que hacer a continuación. Intenta algún ejemplo, piensa a ver si has visto antes un problema parecido. No temas pensar "Yo nunca resolveré este problema". Afortunadamente tendrás alguna inspiración. Intenta otro problema más fácil. Una vez que hayas obtenido algo procura volver atrás, y así varias veces. Habla con un amigo, a veces el hecho de exponer las dificultades produce ideas; sin embargo, si aún así no resuelves el problema, ponte en contacto con tu profesor -para eso está- aunque no le preguntes por la solución explícale tu dificultad y pide ayuda.

- Utiliza las herramientas que te parezcan más adecuadas: tablas, planos, gráficos, diagramas, etc.
- Entre tus indagaciones busca regularidades y **pautas**. En matemáticas la exploración de los modelos es una herramienta imprescindible.
- No temas en hacer **conjeturas** y reponderlas. Contrasta las conjeturas con los datos del problema o ejemplos que hayas generado tu mismo. Recuerda que las conjeturas son la savia de la vida de las matemáticas. Los matemáticos llaman a sus suposiciones conjeturas. Suena más sofisticado pero son la misma cosa. La investigación matemática surge de una conjetura que puede ser o no ser verdad.
- Una vez que hayas profundizado en el problema sabrás que **técnicas matemáticas** quieres utilizar, algebraicas, trigonométricas u otras. Utiliza todas las que sepas. Y no te sorprendas porque un mismo problema se pueda resolver con distintas técnicas.

**C. LLEVA ADELANTE TU ESTRATEGIA.** Desarrolla alguna de las ideas que han surgido en la etapa anterior. No abandones fácilmente y si las cosas se complican demasiado, probablemente haya otro camino. Habla con tus amigos, pregunta a tu profesor y ya sabes: - ensayo y error.

- Una vez que has encontrado una solución, puede que dicha solución tenga algunas objeciones, o bien encuentres algún defecto. Una vez resueltas dichas objeciones y defectos vuelve a escribir la solución. Mi experiencia me dice que, en este punto, a menudo se encuentra una solución más bonita, más corta, más elegante. Cuanto más trabajes en un problema verás más a través de él. También es un asunto de profesionalidad sentirse orgullosos de encontrar una solución fácil y bonita.
- **Generaliza.** Si ya has resuelto el problema, ahora puedes explorar más a su alrededor. Puede que encuentres problemas mucho mayores escondidos. Resolver grandes problemas es más satisfactorio que resolver pequeños. También es potencialmente más útil. Intenta hacer algunas generalizaciones.

En conclusión, resolver problemas es como practicar cualquier otra actividad, fútbol, ajedrez, piano, teatro etc. Muchos de vosotros empezáis con más o menos talento pero para ser realmente buenos hay que practicar y practicar.

### **Volviendo al problema de las jarras**

$$1 = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 5$$

Mirando esta ecuación podemos interpretarla como "llena la jarra de tres litros dos veces y echa una en la de cinco litros". De este modo

$$7 = 14 \cdot 3 - 7 \cdot 5$$

Esto significa que tenemos que llenar la jarra de 3 litros 14 veces y echar 7 veces la de 5 litros. Seguramente habrá un modo más eficiente.

Será más eficiente si se llena la jarra de 5 litros y se echa su contenido en la de 3 litros . De este modo podemos obtener

$$7 = 2 \cdot 5 - 1 \cdot 3$$

Pero, porqué pararnos en 7 litros. Podremos tener  $m$  litros para cualquier entero positivo  $m$ . ¿Qué pasaría si tuvieramos jarras de 3 y 7 litros?. Podremos poner  $m$  litros de agua en nuestro recipiente, ¿Y si tenemos jarras de 3 y 8 litros?, ¿Y si son de 3 y 5 litros?. ¿Y si son de  $r$  y  $s$ ?

**Teorema 1.** Sean  $c$  y  $d$  enteros positivos que no tienen factores comunes. Entonces existen enteros  $a$  y  $b$  tales que  $ac + bd = 1$ . En nuestro ejemplo de las jarras tenemos que  $c = 3$  y  $d = 5$  y encontramos  $a = 2$  y  $b = -1$ . Pero, por supuesto, hay muchos posibles valores para  $a$  y  $b$ . Obviamente dados  $c$  y  $d$ , entonces  $a$  y  $b$  no son únicos.

### Ejercicios

1. a) En el Teorema 1, sea  $c = 3$  y  $d = 7$ . Encontrar posibles valores para  $a$  y  $b$ . Puedes encontrar todos los posibles valores de  $a$  y  $b$ .  
b) Repite lo mismo para  $c = 4$  y  $d = 5$ .
2. Dados  $c$  y  $d$ , siendo  $(c, d) = 1$ ; es decir  $c$  y  $d$  no tienen factores comunes, encontrar todos los  $a$  y  $b$  posibles que satisfacen la ecuación  $ac + bd = 1$
3. Dadas una jarra de 3 litros y otra de 5 litros cuál es la forma más eficiente de medir 73 litros. ¿Qué significa lo mejor?, menor agua gastada o mínimo número de veces que utilizamos las jarras?
4. Dadas una jarra de 3 litros y otra de 7 litros cuál es la forma más eficiente de medir 11 litros.
5. Probar que es posible medir cualquier número entero de litros utilizando sólo jarras de 3 litros y de 7 litros.
6. Repetir los ejercicios anteriores utilizando jarras de 4 litros y de 13 litros.
7. Es verdad que dadas dos jarras de  $r$  y  $s$  litros,  $r$  y  $s$  enteros, se pueden medir  $m$  litros de agua para cualquier entero  $m$ .