EL PROBLEMA DE LAS CARTAS MAL REMITIDAS

Preparamos n cartas dirigidas a n personas distintas, y n sobres con las correspondientes direcciones. Metemos al azar una carta en cada sobre. ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen a su destinatario correcto exactamente k cartas ($k = 0,1,\ldots,n$)?

Con este enunciado, el problema (y su primera solución) ha cumplido ya 250 años (Nicolás Bernoulli, Leonardo Euler). Podemos imaginar que para los responsables por parte española de la identificación de víctimas del accidente del Yak-42 en Turquía era desconocido, pues uno de los resultados a que conduce el análisis del problema es que el promedio de cartas que llegarán a su destinatario es de una sola, para cualquier n.

Admite otros enunciados más divertidos: n matrimonios que van a un baile donde se sortean las parejas, n borrachos que recogen de un perchero sombreros idénticos, n hinchas de un equipo que recogen sus gorras tras haberlas lanzado muy altas al aire; todos ellos, lo mismo que el original, se dejan representar por el siguiente modelo matemático cuya abstracción lo hace más claro de analizar:

¿Cuál es la probabilidad de que en una permutación arbitraria de $12\ldots n$ haya exactamente k elementos fijos ($k = 0,1,\ldots,n$), es decir, k números que permanezcan en su posición natural?

Así, 53241 es una permutación de 12345 en la que hay exactamente un elemento fijo (el 4).

Vamos a denotar por $d(n,k)$ al número de las permutaciones de $12\ldots n$ con k elementos fijos exactamente; y en particular al número $d(n,0)$ lo denotaremos (por su importancia para calcular los demás) simplemente por d_n (número de *permutaciones desbarajustadas* de n elementos). Por ejemplo, cuando $n = 4$ tenemos

perm.	fijos	perm.	fijos	perm.	fijos	perm.	fijos
1234	4	2134	2	3124	1	4123	0
1243	2	2143	0	3142	0	4132	1
1324	2	2314	1	3214	2	4213	1
1342	1	2341	0	3241	1	4231	2
1423	1	2413	0	3412	0	4312	0
1432	2	2431	1	3421	0	4321	0

de manera que $d(4,4) = 1$; $d(4,3) = 0$; $d(4,2) = 6$; $d(4,1) = 8$; $d_4 = d(4,0) = 9$.

Podemos construir una tabla:

n	d_n	$d(n,1)$	$d(n,2)$	$d(n,3)$	$d(n,4)$
1	0	1			
2	1	0	1		
3	2	3	0	1	
4	9	8	6	0	1

Observemos en primer lugar que, como el número total de permutaciones de $12\ldots n$ es $n!$, se tiene

$$\sum_{k=0}^{n} d(n,k) = n! \tag{1}$$

Por otra parte, una permutación de n elementos con k fijos exactamente se obtiene eligiendo los k elementos fijos de cualquier manera entre los n y obligando a que la permutación de los restantes $n-k$ elementos sea *desbarajustada*, luego

$$d(n,k) = \binom{n}{k} \cdot d_{n-k}\,, \tag{2}$$

siendo $\binom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$.

Con las fórmulas (1) y (2) podríamos ahora proseguir nuestra tabla anterior:

n	d_n	$d(n,1)$	$d(n,2)$	$d(n,3)$	$d(n,4)$	$d(n,5)$
5	44	45	20	10	0	1

Pues es claro que $d(5,5)=1$ y $d(5,4)=0$; $d(5,3)=\binom{5}{3}d_2=10$; $d(5,2)=\binom{5}{2}d_3=20$; $d(5,1)=5d_4=45$; y finalmente $d_5=5!-(45+20+10+1)=120-76=44$.

Prosiguiendo un par de filas más, obtenemos una tabla como la siguiente:

n	d_n	$d(n,1)$
1	0	1
2	1	0
3	2	3
4	9	8
5	44	45
6	265	264
7	1854	1855

Basta un golpe de vista para observar que en todas las filas de esta tabla se cumple

$$d_n - d(n,1) = (-1)^n,$$

o bien, dado que $d(n,1)=nd_{n-1}$ según la fórmula (2), que los números d_n cumplen la ley de recurrencia (para $n\geq 2$):

$$d_n = nd_{n-1} + (-1)^n. \tag{3}$$

Si pude ver más lejos es porque me subí a hombros de gigantes.

¿Podemos demostrar que la ley (3) se cumple para todo n? A mediados del siglo XVIII, Euler razonó así (su argumentación original se refería al enunciado con cartas y sobres):

Sea $a_1a_2\ldots a_n$ una permutación desbarajustada de $12\ldots n$ (es decir, se tiene que $a_j \neq j\,\forall j$). El primer número a_1 será uno cualquiera de los $n-1$ números $2,3,\ldots,n$. Pongamos que $a_1=2$. Entonces hay dos posibilidades:

- $a_2=1$, en cuyo caso $a_3\ldots a_n$ será una de las d_{n-2} permutaciones desbarajustadas de $3\ldots n$.
- $a_2\neq 1$, en cuyo caso $a_2a_3\ldots a_n$ será una de las d_{n-1} permutaciones desbarajustadas de los $n-1$ elementos $13\ldots n$.

Luego $d_n=(n-1)\,(d_{n-2}+d_{n-1})$ para todo $n\geq 3$. Y entonces resulta:

$$\begin{aligned} d_n - nd_{n-1} &= -\big(d_{n-1}-(n-1)d_{n-2}\big) \\ &= (-1)^2\big(d_{n-2}-(n-2)d_{n-3}\big) \\ &= \ldots \\ &= (-1)^{n-2}(d_2-2d_1) = (-1)^n, \end{aligned}$$

como se quería demostrar. Así,por ejemplo, $d_8=8d_7+1=14833$.

Además, escribiendo la ley de recurrencia (3) para n, $n-1$, …, 2, dividiendo respectivamente por $n!$, $(n-1)!$, …, $2!$, y sumando las $n-1$ igualdades así obtenidas se obtiene la fórmula general para d_n:

$$d_n = n!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right). \tag{4}$$

(con un poco más de matemáticas esto lleva a ver que d_n es el número entero más próximo a $\frac{n!}{e}$.)

$$\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}$$

Con esto, la solución del problema: la probabilidad de que en una permutación arbitraria de $12\ldots n$ haya exactamente k elementos fijos ($k = 0,1,\ldots,n$) es

$$\begin{aligned} p(n,k) = \frac{d(n,k)}{n!} = \frac{\binom{n}{k} d_{n-k}}{n!} &= \frac{1}{k!} \cdot \frac{d_{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}\right). \end{aligned} \tag{5}$$

Se obtiene la siguiente tabla:

n	$p(n,0)$	$p(n,1)$	$p(n,2)$	$p(n,3)$	$p(n,4)$	$p(n,5)$	$p(n,6)$	$p(n,7)$	$p(n,8)$
1	0	1							
2	0.5	0	0.5						
3	0.333	0.5	0	0.167					
4	0.375	0.333	0.250	0	0.042				
5	0.367	0.375	0.167	0.083	0	0.008			
6	0.368	0.367	0.188	0.056	0.021	0	0.001		
7	0.368	0.368	0.183	0.063	0.014	0.004	0	0.000	
8	0.368	0.368	0.184	0.061	0.016	0.003	0.001	0	0.000

(A medida que n aumenta, los valores en cada columna $p(n,k)$ se van estabilizando rápidamente en torno a su valor límite $\frac{1}{ek!}$.)

Finalmente, el promedio, $\overline{f}$, del número de elementos fijos entre las $n!$ permutaciones de $12\ldots n$ es

$$\overline{f} = \frac{\sum_{k=0}^{n} k \cdot d(n,k)}{n!} = 1,$$

pues se tiene también que

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot d(n,k) = n!, \tag{6}$$

cosa que se puede probar contando los elementos fijos en el total de las $n!$ permutaciones de $12\ldots n$ de dos maneras:

- por un lado, para cada $j = 1,2,\ldots,n$, el elemento j es fijo en $(n-1)!$ permutaciones, luego el total de fijos es $n(n-1)! = n!$.
- y por otro lado es obvio que el total de fijos es $\sum_{k=0}^{n} k \cdot d(n,k)$.

En la siguiente dirección web de la Universidad de Florencia: `http://www.ds.unifi.it/VL/VL_EN/urn/urn6.html` (en inglés, pero este laboratorio virtual de estadística también lo tienen en italiano), además de desarrollar las matemáticas del problema tienen un simulador interactivo del experimento consistente en repetir un número N grande de veces el reparto de las n cartas en los n sobres, para $n \leq 20$.

MERCHE SÁNCHEZ