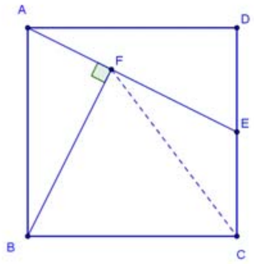
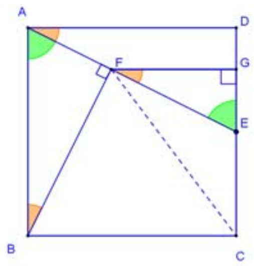
PROBLEMA



Dado un cuadrado ABCD, llamamos E al punto medio del lado CD. Unimos A con E; desde B trazamos la perpendicular a AE y esta corta a AE en F. Probar que CF=CD.

Solución 1

Como ABCD es un cuadrado, entonces loa ángulos FAB y DAE son complementarios y por lo tanto los ángulos FAB y AED son iguales y los triángulos rectángulos FAB y DEA son semejantes. Por lo tanto, si llamamos a la longitud del lado s, entonces DA=s, ED=s/2 y $AE=\frac{\sqrt{5}\cdot s}{2}$



Entonces, por semejanza tenemos que

$$\frac{FA}{DE}=\frac{AB}{EA}\Rightarrow\frac{2FA}{s}=\frac{2s}{\sqrt{5}\cdot s}\Rightarrow FA=\frac{s}{\sqrt{5}}$$

Trazamos la perpendicular desde F a CD, y corta a este lado en G. También son semejantes los triángulos GFE y DAE, por lo que $FE=\frac{\sqrt{5}\cdot s}{2}-\frac{s}{\sqrt{5}}=\frac{3s}{2\sqrt{5}}$; por lo tanto:

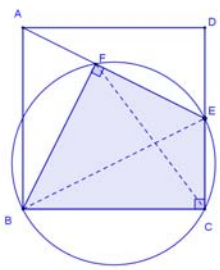
$$\frac{GF}{DA}=\frac{FE}{AE}\Rightarrow\frac{GF}{s}=\frac{\frac{3s}{2\sqrt{5}}}{\frac{\sqrt{5}\cdot s}{2}}\Rightarrow GF=\frac{3s}{5}$$. Del mismo modo $EG=\frac{3s}{10}$

Finalmente, aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo CGF, donde $CG=\frac{s}{2}+\frac{3s}{10}=\frac{4s}{5}$,

Tenemos que $CF^2=\left(\frac{3s}{5}\right)^2+\left(\frac{4s}{5}\right)^2=s^2$. Por lo tanto $CF=s=CD$.

Solución 2

Como los ángulos BFE y ECB son rectos, el cuadrilátero BFEC es cíclico. Entonces si $BC=s$,



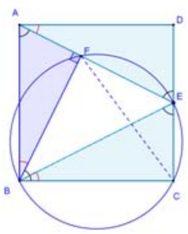
$CE=\frac{s}{2}$, $EF=\frac{3s}{2\sqrt{5}}$, $FB=\frac{2s}{\sqrt{5}}$ y $BE=\frac{s\sqrt{5}}{2}$.

Así, por el teorema de Ptolomeo tenemos que:

$CF \cdot BE = BC \cdot EF + CE \cdot FB$, es decir: $CF\left(\frac{s\sqrt{5}}{2}\right) = s\left(\frac{3s}{2\sqrt{5}}\right) + \left(\frac{s}{2}\right)\cdot\left(\frac{2s}{\sqrt{5}}\right)$, y de aquí

$CF = s = CD$

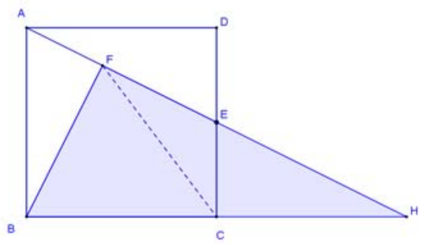
Solución3



Siguiendo con lo que hemos visto en los casos anteriores, los triángulos ADE y BCE son iguales y ambos semejantes al triángulo BFA. Así los ángulos AED, BEC y BAF son iguales. Y los ángulos complementarios también: AED=BEC=BAF=FBC. Como los ángulos BEC Y FBC son iguales, entonces las cuerdas que los subtienden son iguales, esto es $CF = BC$; y como es un cuadrado $CF = CD$

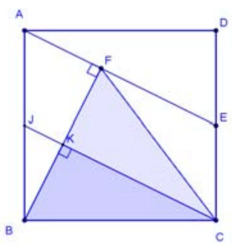
Solución 4

Si reflejamos por el punto E el triángulo AED obtenemos el triángulo HEC, donde H es el punto de la prolongación de AE que corta a la recta BC.



Ahora el triángulo BFH es rectángulo, por lo tanto se puede inscribir en una circunferencia de diámetro BH. Por lo tanto, el radio de la circunferencia que es s será igual $CF = BC = CH = s$, y por tanto $CF = CD$.

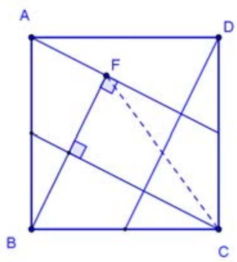
Solución 5



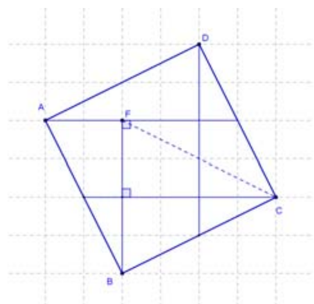
Sea J el punto medio de AB y la recta CJ corta a BF en K. CJ y EA son rectas paralelas, con lo que BF y CJ son perpendiculares y $\frac{BK}{KF} = \frac{BJ}{JA} = 1$

Por lo tanto $BK = KF$. Ya tenemos suficiente información para ver que los triángulos CKF y CKB son idénticos. Por tanto $CF = BC$

Solución 6



Si continuamos con la idea de la última solución, vemos que si empezamos con un cuadrado y unimos

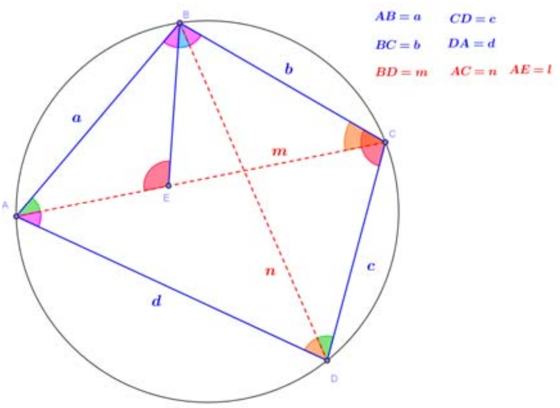


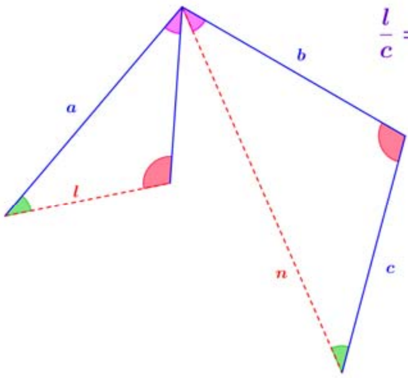
A con el punto medio de CD, B con el punto medio de AD, C con el punto medio de AB y D con el punto medio de BC. Así se genera un cuadrado en el interior. Y con una retícula podemos ver con una demostración sin palabras que el lado $CF = BC$

Teorema de Ptolomeo

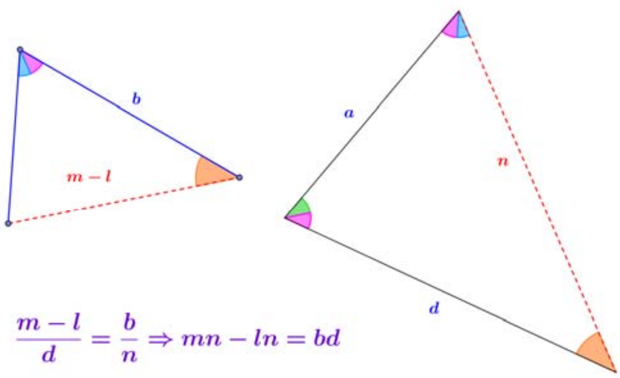
En un cuadrilátero cíclico, la suma de los productos de lados opuestos es igual al producto de sus diagonales.

Demostración clásica: Elegimos E de modo que el ángulo ABE sea igual al ángulo DBC



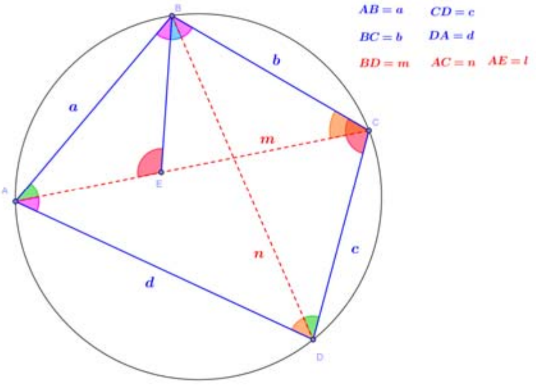


$$\frac{l}{c} = \frac{a}{n} \Rightarrow ln = ac$$



$$\frac{m-l}{d} = \frac{b}{n} \Rightarrow mn - ln = bd$$

Recíprocamente, vamos a probar que si *ac* + *bd* = *mn*, entonces el cuadrilátero ABCD es cíclico.



Se construye el ángulo *ABE* igual al ángulo *CBD* y se determina BE tal que $\dfrac{AE}{CD} = \dfrac{AB}{BD}$.

Entonces los triángulos ABE y BCD son semejantes y se tiene que $\dfrac{AE}{CD} = \dfrac{AB}{BD} = \dfrac{BE}{BC}$. Por lo tanto los triángulos ABD y BEC son semejantes porque tienen lados proporcionales que comprenden ángulos iguales.

Entonces $\dfrac{EC}{AD} = \dfrac{BC}{BD}$

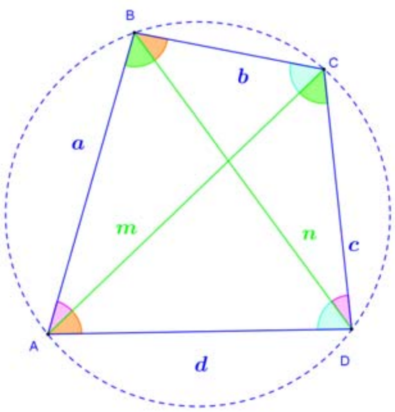
Por lo tanto $AE = \dfrac{AB \cdot CD}{BD}$ y $EC = \dfrac{BC \cdot AD}{BD}$, y en consecuencia

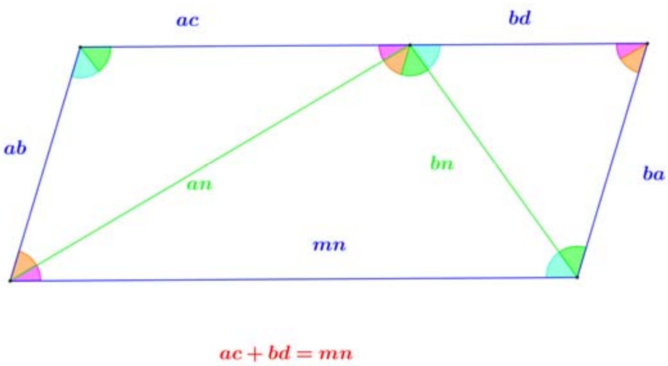
$AE + EC = \dfrac{AB \cdot CD}{BD} + \dfrac{BC \cdot AD}{BD}$, pero como $AB \cdot DC + BC \cdot DA = AC \cdot BD$, se tiene que

$AE + EC = AC$, lo cual indica que AEC es una línea recta, y esto implica que

$\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = \widehat{CED} + \widehat{DEA} = 180^{o}$ y el cuadrilátero es cíclico.

La demostración visual que he visto en [Cut-The-Knot] es la siguiente:

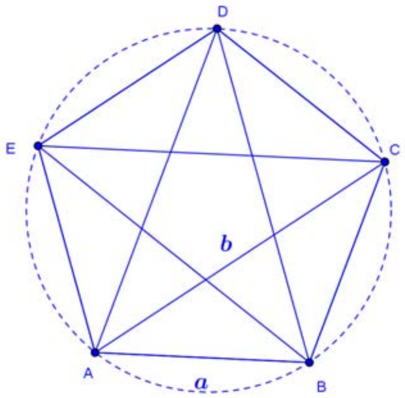




Unas aplicaciones muy conocidas:

Ejemplo 1.

Dado un pentágono regular ABCDE, hallar la razón AC/AB.
Solución.

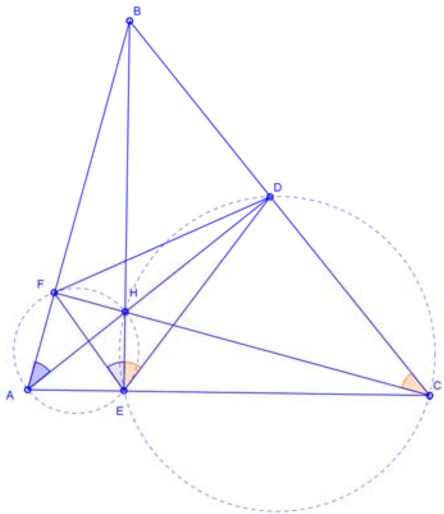


Consideremos el pentágono de la figura, y llamemos a al lado del pentágono y b a la longitud de sus diagonales. Consideremos el pentágono con su circunferencia circunscrita. Si nos fijamos, tenemos muchos cuadriláteros cíclicos en la figura, todos ellos son iguales. Escojamos el cuadrilátero ABDE para trabajar. Entonces, aplicando el teorema de Ptolomeo tenemos que: $a \cdot b + a \cdot a = b \cdot b$,

Resolviendo la ecuación en b, se tiene que $b = \frac{a \pm a\sqrt{5}}{2}$; puesto que a y b son medidas positivas se tiene que: $\frac{b}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Ejemplo 2.

Sean D, E y F los pies de las alturas del triángulo ABC. Probar que las alturas del triángulo ABC son las bisectrices del triángulo DEF.
Solución.



Como los ángulos AFH y AEH son rectos, el cuadrilátero AFHE es cíclico y se puede inscribir en una circunferencia de diámetro AH. Por lo tanto, los ángulos FAH y FEH son iguales.

Análogamente, en el cuadrilátero CDHE tenemos que los ángulos DCH y DEH son iguales. Pero en los triángulos rectángulos ABD y CBF, los ángulos FAH y DCH miden 90º-B, por lo que los ángulos FAH y DCH son iguales. Se sigue que los ángulos FEH y DEH son iguales; es decir BE es la bisectriz de DEF.