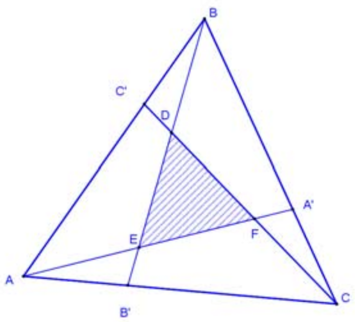
CEVIANAS

Dado un triángulo equilátero ABC se une cada vértice con un punto del lado opuesto, de modo que cada punto divida al lado en la razón 1:2. De esta manera se genera en el interior otro triángulo equilátero DEF. Encuentra la razón de las áreas de los dos triángulos.

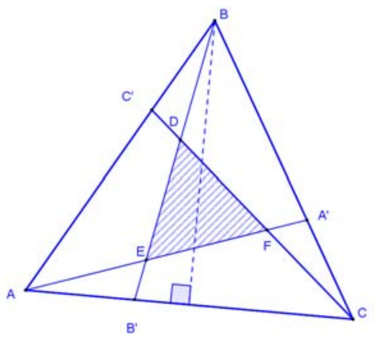


Suponemos por comodidad que el lado AB mide 3 unidades, llamamos a=DC' =EB'=FA', b=FC=DB=EA y l la longitud del lado del triángulo DEF.

Los triángulos BAB' y BDC' son semejantes, y se tiene que:

$$\frac{a}{1}=\frac{b}{3}=\frac{1}{BB'}\Rightarrow 3a=b \quad y \quad b=\frac{3}{BB'}$$

Los triángulos EBA' y B'BC también son semejantes, y por lo tanto $\frac{l+a}{2}=\frac{l+b}{3}$. De las dos relaciones tenemos que $l=b=\frac{3}{BB'}$. Por lo tanto la razón de los lados es $\frac{1}{BB'}$.

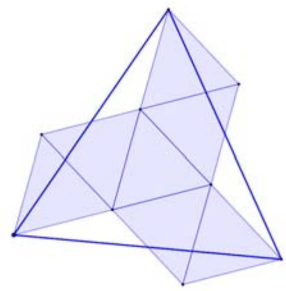


Por el Teorema de Pitágoras

$$BB'^2=\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=7$$

Es decir, la razón de las áreas es

$$\frac{[DEF]}{[ABC]}=\frac{1}{7}$$

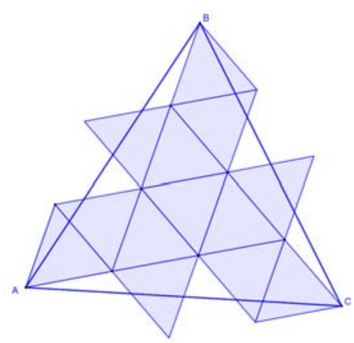


Una primera generalización:

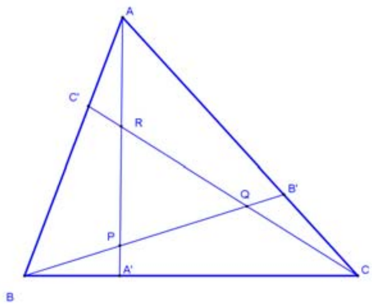
En un triángulo equilátero ABC se une cada vértice con un punto del lado opuesto de forma que divida a ese lado en la razón 1:k, de esta manera se obtiene un triángulo equilátero DEF en el interior. Calcula la razón de las áreas.

Razonando de manera igual que en el caso anterior , ponemos por comodidad que el lado del triángulo equilátero sea 1+k y obtenemos que la razón pedida es: $\frac{(k-1)^2}{k^2+k+1}$.

Un ejemplo para k=3



Una segunda generalización:



Ahora el triángulo de partida no es equilátero y los lados se dividen en razones diferentes:

En un triángulo cualquiera ABC unimos cada vértice con un punto del lado opuesto obteniendo los segmentos AA', BB', CC' llamados cevianas. Los puntos A', B' y C' dividen a cada uno de los lados BC, AC y AB respectivamente en las razones

$r=\frac{A'C}{BA'}$, $s=\frac{AB'}{B'C}$ y $t=\frac{BC'}{C'A}$

Queremos hallar la relación entre el área del triángulo PQR formado en el interior del triángulo ABC por las tres cevianas y el área del triángulo ABC.

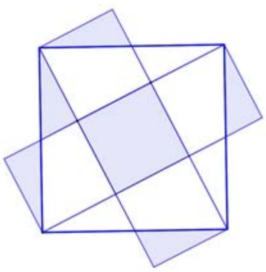
El resultado de este problema es lo que se conoce como teorema de Routh: Si S es el área del triángulo ABC y S'' el área del triángulo PQR entonces: $S''=S\,\frac{(rst-1)^2}{(1+s+rs)(1+t+st)(1+r+tr)}$

La demostración debida a Ivan Niven se realiza con geometría analítica, hay otras que tan sólo se necesita la semejanza de triángulos.

A partir de aquí se puede deducir el Teorema de Ceva: Las cevianas concurren en un punto si y sólo si $rst=1$

Se puede deducir que las medianas, las alturas y las bisectrices de un triángulo concurren en un punto sin más que comprobar en cada caso que $rst=1$.

Y también se puede obtener como consecuencia el teorema de Menelao.



Podemos preguntarnos ahora **¿qué pasa en un cuadrado?** Y podemos ver fácilmente que

En general, si suponemos que el lado AB de un cuadrado mide n, y elegimos un punto C' de este lado, de modo que el segmento queda dividido en dos partes, una de longitud k y la otra n-k, entonces el área del cuadrado pequeño es $\frac{(n-k)^2}{k^2+n^2}$ veces el área del cuadrado inicial.