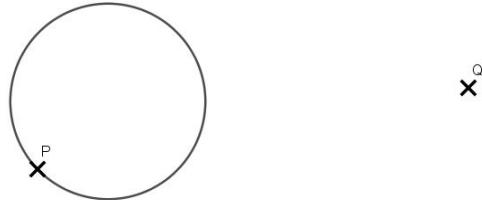


SUMA DE LOS ANGULOS DE UN TRIANGULO EN LA ESFERA Y EN EL CILINDRO

María Pe Pereira

Calentamiento sobre circunferencias y esferas:

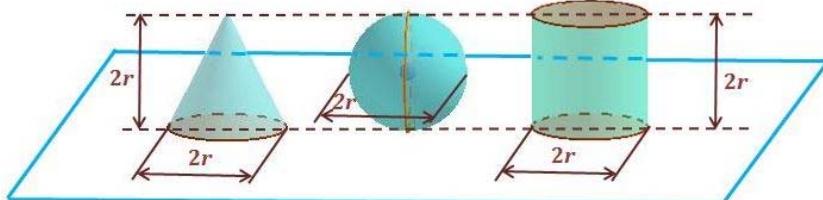
- 1- Tienes un compás y una regla. ¿Cómo puedes encontrar el centro de esta circunferencia? ¿Y hallar la recta tangente a la circunferencia en el punto P?. ¿Y una recta tangente a la circunferencia que pase por el punto Q?. ¿Puedes encontrar más de una?



- 2- Describe el corte de una esfera de radio R con un plano.
- 3- ¿Cómo podemos encontrar el centro de una esfera.?
- 4- Dados 3 puntos, encuentra esferas que pasen por los tres puntos. ¿Cuántas puedes encontrar?
- 5- ¿Cuál es plano tangente a una esfera en un punto P?
- 6- Dada una esfera y un punto Q fuera, encuentra rectas tangentes a la esfera pasando por Q.

Volumen de la esfera.

- 1- Calcula el volumen de una esfera de radio r usando lo siguiente



$$\frac{\text{Volumen cono}}{\text{Volumen esfera}} = \frac{2}{\pi r^2} = \frac{\text{Volumen cilindro}}{3}$$

Sabiendo el volumen de la esfera y aproximando la esfera como una unión de pirámides con vértice el centro de la esfera y base tan pequeña como queramos, se puede ver que el área de la esfera es $4 \pi r^2$. En esta construcción el área de la esfera está aproximada por la unión de las bases de las pirámides.

- 2- Deduce el área de la esfera de la fórmula anterior. Para ello puedes aproximar el volumen de la esfera por el volumen de pirámides con vértice el centro de la esfera y base con vértices en la superficie de la esfera.

Sobre la curvatura de superficies.

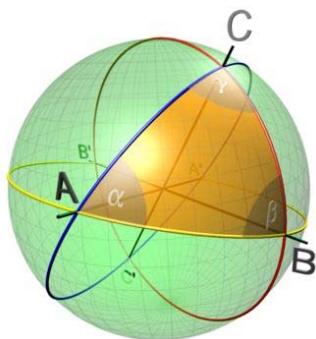
Suma de los ángulos de un triángulo en una esfera.

En la charla introdujimos triángulos en superficies. Estos se obtenían a partir de tres puntos en la superficie que los uníamos por los caminos (contenidos en la superficie) más cortos que los unían. Si sumábamos los 3 ángulos de triángulos de este tipo, su suma dependía de la curvatura de la superficie.

Recuerdo que una superficie tiene curvatura positiva en un punto P si podemos apoyar un plano en ese punto de la superficie y además la superficie no tiene curvas con curvatura 0 pasando por ese punto. Si una superficie tiene curvatura positiva en todos sus puntos, el Teorema de Gauss Bonnet nos dice que la suma de los ángulos de cualquier triángulo en ella es mayor de 180º.

La esfera tiene curvatura positiva en todos sus puntos. Veamos cuánto suman los ángulos de un triángulo esférico y comprobemos que el teorema es cierto para este caso particular. En la esfera los caminos más cortos los realizan círculos máximos, es decir, circunferencias como el ecuador, que se obtienen cortando la esfera con un plano que pasa por el centro.

- 1- Tenemos un triángulo esférico. Nos interesa estudiar cuánto suman sus ángulos. Empecemos prolongando los lados del triángulo. ¿Cuántas regiones obtenemos?



- 2- Supongamos tenemos solo un ángulo de los tres del triángulo. Éste me determina un gajo doble de la esfera. ¿Qué área tiene?
 3- Vamos a coger los 3 gajos dobles que nos determinan los ángulos del triángulo esférico. ¿Qué superficie cubren?
 4- ¿Cuánto mide el área del triángulo en función de sus ángulos?
 5- ¿Puede ser que la suma de los ángulos sea exactamente 180º?

Suma de los ángulos de un triángulo en un cilindro.

El cilindro tiene curvatura cero, porque en cada punto podemos apoyar un plano pero hay rectas que pasan por él contenidas en el cilindro.

¿Cómo puedes hacer un mapa perfecto del cilindro?

Puedes dibujar los triángulos en el mapa. ¿Cuánto suman sus ángulos?