Estalmat Madrid

11 de marzo de 2017

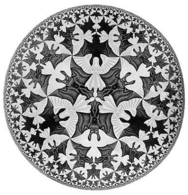
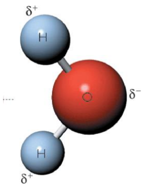
Mª Jesús Vázquez-Gallo

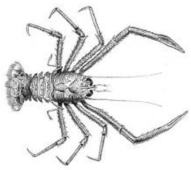
Simetrías

Recuerda: El Universo está lleno de objetos -naturales y artificiales- y fenómenos en los que la **simetría** está presente…






La simetría nos produce placer estético pero no sólo eso…

La simetría gobierna las leyes fundamentales de la Física y multitud de sistemas biológicos. Comprender la simetría nos ayuda a comprender el Universo.

Por ejemplo, en la imagen de una mariposa vemos "dos mitades simétricas" con respecto a un eje (recta) vertical:

Si esa recta hace de espejo y enviamos cada punto de un lado al punto reflejado en el otro lado… los puntos se mueven, pero la forma y el tamaño de la mariposa no cambia.

Matemáticamente, la simetría de la mariposa consiste en la *reflexión* respecto a la recta vertical: esa reflexión es un cambio (o *transformación*) que deja a la mariposa igual (su tamaño y su forma permanecen *invariantes*).

Una ***simetría*** de un objeto es un ***cambio o transformación*** del objeto ***que deja invariante alguna propiedad del objeto***.

Vamos a entrar en calor con las simetrías de un colchón…

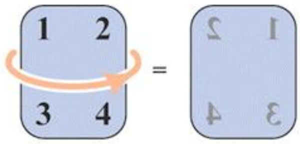
El placer de la X. Steven Strogatz. Ed. Taurus.

Cuando cambiamos de posición un colchón, estamos aplicando una *simetría a un rectángulo*. Si hacemos dos cambios seguidos, estaremos haciendo una *composición* de simetrías.

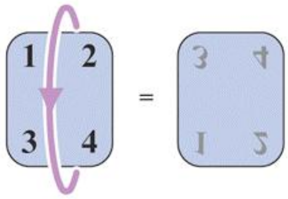
1. **¿De *cuántas* maneras *distintas* podemos hacer el cambio?**

(A falta de colchones… usa un rectángulo de papel para explorar lo que sucede)

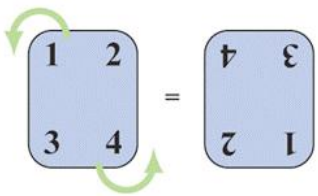
Para *describir estas simetrías* puede ser útil numerar los vértices del rectángulo. Probablemente habrás llegado a esta *lista*:



Reflexión respecto a eje vertical central: V



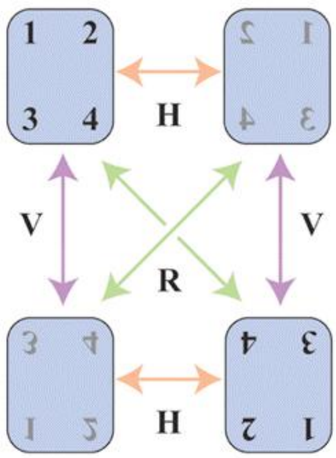
Reflexión respecto a eje horizontal central: H



Giro o rotación de 180º alrededor del centro: *R*

2. **¿Falta alguna?...** Sí, claro, la más cómoda… La que envía cada punto a sí mismo: se denomina *transformación identidad, I*.

Visualmente:

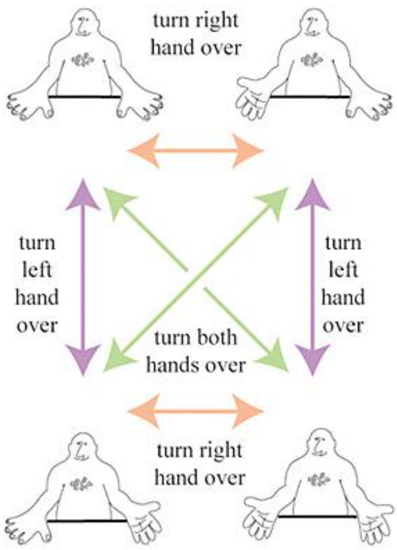


El placer de la X. Steven Strogatz. Ed. Taurus.

La *tabla de composición* de simetrías es:

	V	***H***	$\boldsymbol{R_{180}}$	**I=R**$_{360}$
V				
H				
$\boldsymbol{R_{180}}$				
I=R$_{360}$				

La estructura de las simetrías de un rectángulo es la misma que la de las transformaciones que puedes hacer con tus manos para mostrarlas del derecho o del revés:



El placer de la X. Steven Strogatz. Ed. Taurus.

Los cristales (copos de nieve, sal, cuarzo o diamante) se clasifican según las simetrías que poseen y, de hecho, éstas determinan sus propiedades.

También se puede predecir el comportamiento óptico de una molécula según su grupo de simetría: por ejemplo, cómo interactúa con la radiación infrarroja.

Este tipo de *estructura* especial, que puede ser la misma en situaciones aparentemente distintas, se denomina ***grupo***. Recuerda que se caracteriza por:

- al componer dos de ellas siempre se obtiene otra de la misma colección (la composición es *cerrada)*,
- cuando componemos tres elementos de las dos formas posibles, el resultado final es el mismo (*propiedad asociativa)*: M(NP)=(MN)P
  (Lado izquierdo: primero P y detrás N y luego M al resultado anterior,
  Lado derecho: primero P y luego aplicar a P el resultado de N y luego M),
- existe un elemento inofensivo en el grupo, el *elemento neutro*, que al ser combinado con cualquier otro, no lo altera. Es como el 0 cuando sumamos o el 1 cuando multiplicamos,
- cada elemento tiene un *elemento inverso* con efecto contrario al suyo y por tanto si se compone un elemento con su inverso, en cualquier orden, se obtiene el elemento neutro (es como si no hubiéramos hecho nada).

3. ¿Podría haber más de un inverso para un elemento? Intenta demostrarlo.

4. **Las simetrías de un cuadrado forman también un grupo: ¿es el mismo que el de simetrías de rectángulo?**

Al grupo de simetrías de un cuadrado se le conoce como grupo de Leonardo (da Vinci). Recuerda: es un ejemplo de *grupo diédrico* (el grupo de simetrías de un polígono regular de n lados que tiene … elementos).

Así que las simetrías de un objeto son transformaciones que conservan alguna propiedad del objeto.

5. **¿Puedes identificar qué tipo de transformación ha sufrido la caricatura en las siguientes figuras y si se ha conservado alguna propiedad en cada caso?**

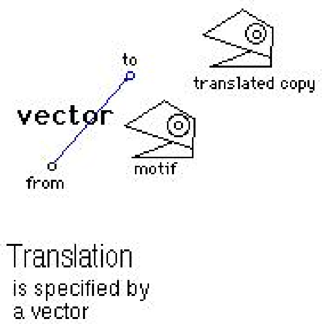
C. Goodman-Strauss: http://comp.uark.edu/~strauss/symmetry.unit/sym.1.1.5.html

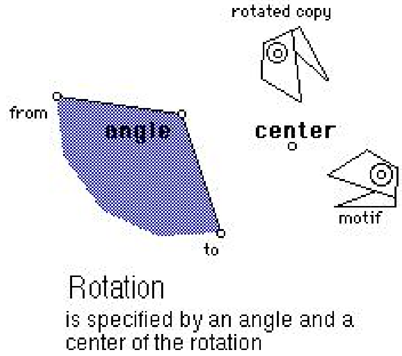
Las *simetrías que dejan invariante el tamaño y la forma* de un objeto pueden verse como **movimientos** rígidos que cambian la posición de los puntos *conservando las distancias* entre ellos (por eso también se denominan *isometrías*).

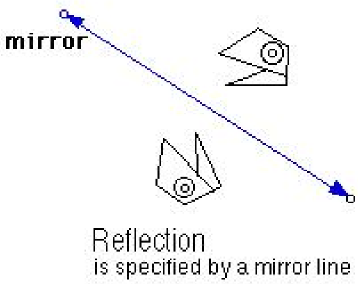
En un plano, la ***reflexión respecto a una recta*** o eje de simetría (como antes) es uno de estos movimientos pero un cambio de escala no lo es aunque conserve la forma.

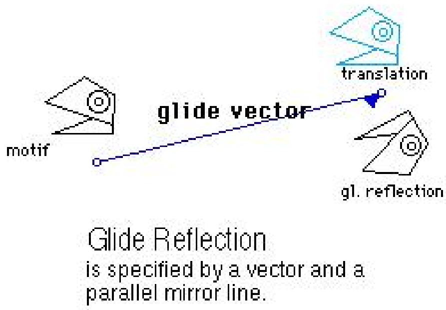
6. **¿Podrías encontrar los tipos de movimientos posibles en un plano?**

Probablemente habrás llegado a que *los tipos posibles de movimientos en el plano* son:





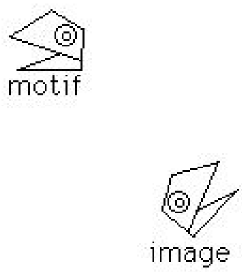


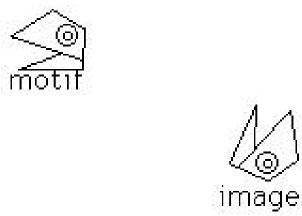


C. Goodman-Strauss: http://comp.uark.edu/~strauss/symmetry.unit/sym.1.1.5.html

Demostrar este hecho implicar estudiar composiciones de movimientos y puntos fijos.

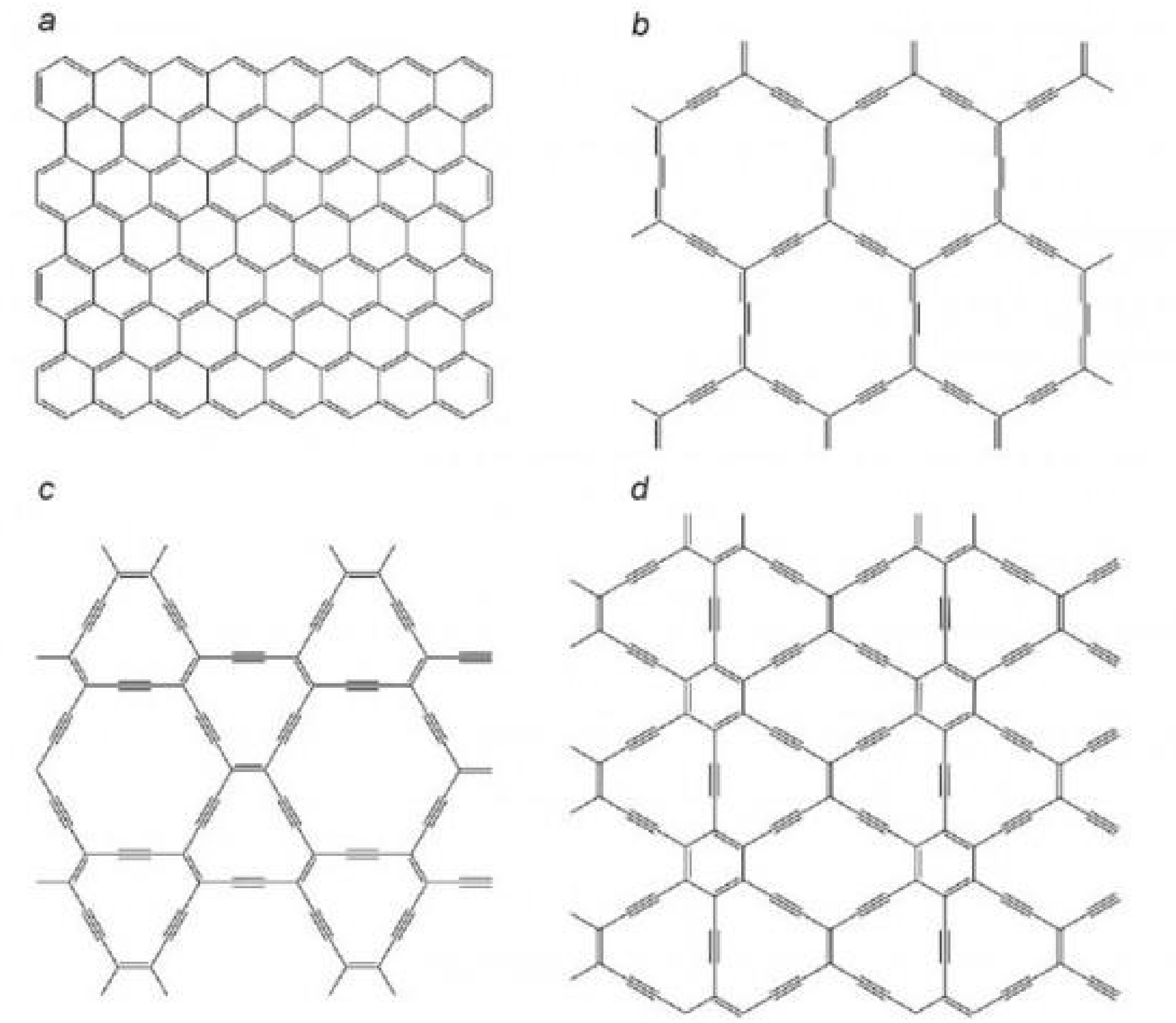
Ahora imagina que tienes dos copias de una imagen en un papel, una es la original y la otra es el resultado de aplicarle uno o varios movimientos. Aquí puedes ver dos ejemplos:





7. **Encuentra en cada caso qué movimientos se han aplicado transformar el motivo original en su imagen. ¿Se te ocurre un procedimiento general?**

La simetría influye en las propiedades de los materiales: observa estas cuatro imágenes que corresponden a distintas estructuras moleculares del carbono (grafeno y grafinos) con propiedades espectaculares de ligereza, resistencia, etc.



Tres de estos patrones se obtienen a partir de un motivo básico hexagonal y sólo uno corresponde a un motivo rectangular lo que le confiere propiedades especiales.

8. **¿Puedes encontrarlo?**

El enfoque matemático de la idea de simetría, utilizando teoría de grupos, le sirvió a Emmy Noether, una de las pocas mujeres que pudo dedicarse a las Matemáticas a comienzos del siglo XX, para conectar la simetría del espacio y del tiempo con la compleja dinámica de la Física:

Por cada simetría continua de las leyes físicas ha de existir una ley de conservación.

Por cada ley de conservación, ha de existir una simetría continua.

Teorema de Noether.