Rompecocos topológicos

1 En el siguiente mapa de España peninsular, se han señalado algunos pasos entre comunidades autónomas. ¿Se puede hacer un recorrido de forma que se pase por todas las comunidades autónomas y se cruce cada uno de los pasos una y sólo una vez? En caso afirmativo, ¿en dónde se empieza y termina?

2 Se obtiene un tablero de ajedrez en forma de cruz eliminando de un tablero 4x4 los cuadraditos de las esquinas, tal como se ve en el dibujo. ¿Puede un caballo de ajedrez moverse sobre este tablero de tal manera que pase exactamente una vez por cada casilla y termine en la misma casilla en donde empezó?

3 En el Númerolandia hay nueve ciudades, con los nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. *Fermat* S.A., la única compañía aérea del país, establece una ruta aérea entre dos ciudades si y solamente si el número de dos dígitos formado por los nombres de las ciudades es divisible entre tres. Si visitas este extraño país, ¿serás capaz de alguna manera de viajar de la ciudad 1 a la ciudad 9 por avión?.

4 En el reino vecino a Númerolandia, hay 100 ciudades y de cada una de ellas parten 4 líneas de ferrocarril a otras tantas ciudades. ¿Cuántas líneas hay en total en el reino?

5 En una oficina hay 7 ordenadores. ¿Es posible conectar por cable cada teléfono con exactamente otros tres?

6 En una clase hay 30 estudiantes. ¿Es posible que nueve de ellos tengan 3 amigos (en clase) cada uno, once tengan 4 amigos cada uno y diez tengan 5 amigos cada uno? Invéntate otra distribución de amigos de este estilo que sea posible.

7 ✕ Se tiene una caja con 6 agujas de punto largas. Intenta colocarlas sobre una mesa de tal manera que cada una de ellas toque exactamente a otras dos. Vuelve a colocarlas de tal manera que cada una de ellas que exactamente a otras tres. Intenta hacer esto último con 7 agujas en vez de 6.

8 En cierta región remota hay 15 ciudades. Cada una de ellas está unida por carretera con 7 ó más ciudades. Probar que siempre se puede ir en carretera de la capital a cualquier otra ciudad (posiblemente pasando por otras ciudades).

9 Un alambre tiene una longitud de 120 cm. ¿Se puede utilizar dicho alambre (sin cortarlo) para formar las aristas de un cubo de 10 cm de lado? Si no es posible, ¿cuál es el menor número de cortes que se necesitaría para formar dicho cubo?

10 Se tienen tres casas y tres pozos (como en la figura, o en cualquier otra posición relativa). Intenta dibujar senderos que unan cada casa con cada pozo de tal manera que no se crucen.