ALGUNOS PROBLEMITAS...

1. Sea $p(x)$ un polinomio de coeficientes racionales. Probar que existe un entero positivo $n \in \mathbb{N}$ tal que el polinomio

$$q(x) = p(x+n) - p(x)$$

tienes todos los coeficientes enteros.

2. Determinar los números naturales n para los cuales $2007 + 4^n$ es un cuadrado perfecto.

3. Sea n un entero positivo. Probar que el número $3n$ o el número $7n$ tiene una cifra impar.

4. Evaluar la suma

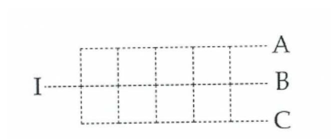
$$\left\lfloor \frac{1}{13} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3}{13} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3^2}{13} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{3^{101}}{13} \right\rfloor,$$

donde $\lfloor \cdots \rfloor$ denota la parte entera de un número.

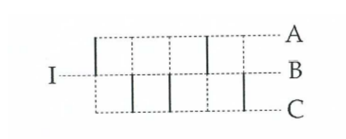
5. En un tablero 2009×2009 se coloca en cada casilla un 1 o un -1. Denotamos por A_i el producto de los números de la fila i, $i = 1, ..., 2009$, y por B_j el producto de los números de la columna j, $j = 1, ..., 2009$. Probar que

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_{2009} + B_1 + B_2 + \cdots + B_{2009} \neq 0.$$

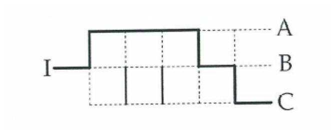
6. A una cuadrícula de $2n \times 2$ se le añade un incio I y 3 salidas A, B y C como en la figura



sobre cada una de las líneas verticales se elige un segmento correspondiente a una de las dos filas. Por ejemplo



Un robot sigue un camino por las líneas horizontales de la figura comenzando desde I de izquierda a derecha y al pasar por algún vértice que toca un segmento seleccionado, gira 90^o y sigue por dicho segmento, al terminarlo gira 90^o de nuevo y continúa avanzando sobre las líneas horizontales de izquierda a derecha. Por ejemplo:



Observemos que cada elección de de segmentos determina de manera única un camino que parte de I y termina en uno de los puntos A, B o C.

Sea $A(n)$, $B(n)$ y $C(n)$ la cantidad de casminos que llegan a A, B y C respectivamente. Determinar $A(n)$, $B(n)$ y $C(n)$ en función de $A(n-1)$, $B(n-1)$ y $C(n-1)$. Calcular los valores de $A(n)$, $B(n)$ y $C(n)$.

¿Cuál de las trés salidas es más probable? ¿Cuál es su probabildiad?

7. El profesor escribe en la pizarra una ecuación cuadrática de la forma

$$x^2 + mx \blacksquare n = 0.$$

El signo de n está borroso.Aun así, los estudiantes la resuelven las dos ecuaciones y obtienen 4 soluciones enteras, una de las cuales es 2011. Hallar todos los posibles valores de m y n.

8. Sea $S = \{x_1 < x_2 < \cdots < x_n\}$ un conjunto de n enteros ordenados de forma creciente. Supóngase que el conjunto

$$T = \{x_i + x_j | i \neq j\}$$

de todas las posibles sumas de elementos distintos de S tiene $2n-3$ elementos. Probar que los primeros $n-2$ términos de S forman una progresión aritmética.