PROBLEMAS CON LOS NÚMEROS DE FIBONACCI

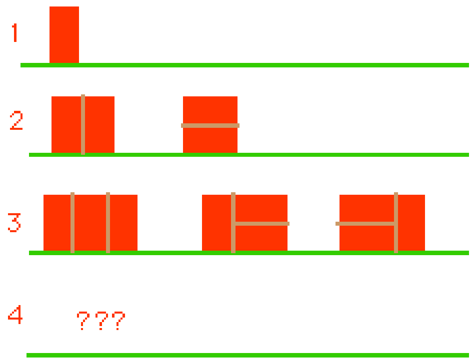
1. Números de Fibonacci y patrones con ladrillos

Si queremos construir una pared de ladrillo con los ladrillos de tamaño usual, que miden el doble de ancho (dos unidades) que de alto (una unidad), y si nuestro muro tiene dos unidades de alto, podemos construir el muro de un determinado número de formas, según cómo de largo lo queramos:

Sólo hay una forma de hacer un muro de una unidad de largo: colocar un solo ladrillo, de pie.

Hay dos formas de hacer un muro de longitud 2: dos ladrillos de pie, uno al lado del otro, o dos ladrillos tumbados, uno sobre otro.

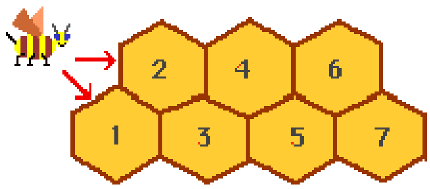
Hay tres formas de hacer un muro de longitud 3:



¿Cuántas formas hay de hacer un muro de longitud 4? ¿Y 5? ¿Encuentras algo familiar en esos números? ¿Podrías explicar por qué aparecen?

2. Moviéndose como una abeja por su colmena

En el dibujo hay una abeja, junto al extremo de algunas celdas de un panal. Puede empezar sólo en la celda 1 o 2, y sólo puede moverse hacia la derecha, es decir, hacia una celda vecina que contenga un número mayor que la celda en la que se encuentra.



Sólo hay una forma de llegar a la celda 1, pero hay dos formas de llegar a la celda 2: directamente, o pasando por la celda 1.

Para la celda 3, puede ir 123, 13 o 23, es decir, hay tres caminos distintos.

¿Cuántas formas hay para ir desde el principio hasta la celda n?

Otra vez aparecen los números de Fibonacci. ¿Podrías explicar por qué?

3. Sillas en fila: que los profesores no se sienten juntos

Esta vez, tenemos n sillas en fila, y una habitación llena de gente. Si alguna vez has ido a una reunión donde hay profesores, sabrás que siempre hablan de su escuela, colegio, facultad o lo que sea (¡qué rollo!). Así que vamos a insistir en que dos profesores no se puedan sentar juntos en la fila de sillas, y vamos a contar de cuántas formas posibles se pueden sentar n personas, si algunos son profesores (**P**), que no se pueden sentar juntos, y otros son personas normales, digoooo, no-profesores (**N**).

1 silla: **P** o **N**, dos formas.

2 sillas: **NN** o **PN** o **NP**, 3 formas (**PP** no está permitido).

3 sillas: **NNN**, **NNP**, **NPN**, **PNN** o **PNP**, 5 formas. Esta vez, **PPN**, **NPP** y **PPP** no están permitidos.

¿Cuántas posibilidades hay si tenemos n sillas? En efecto, otra vez, el número de formas de sentarse es siempre un número de Fibonacci. ¿Por qué?

4. Sillas en fila: la versión amistosa

Esta variación del problema es un poco más amable con los profesores.

Cada persona, profesor o no, no debe sentarse solo, sino que un profesor debe sentarse junto a otro profesor, para poder charlar de sus cosas, y un no-profesor debe sentarse junto a otro no-profesor, ¡para no morir de aburrimiento!

Así que podemos tener **...PPN...** porque cada profesor está sentado junto a otro. El no-profesor de la derecha necesitará también otro no-profesor a su derecha, claro.

Añadimos también una condición extra: el primero en sentarse (el del extremo de la izquierda) debe ser siempre un profesor (algún privilegio teníamos que tener los profesores, ¿no?).

1 silla: –, 0 formas.

2 sillas: **PP**, 1 forma.

3 sillas: **PPP**, 1 forma.

4 sillas: **PPPP** o **PPNN**, 2 formas.

5 sillas: **PPPPP**, **PPPNN** o **PPNNN**, 3 formas.

Comprueba que siempre hay un número de Fibonacci de configuraciones válidas siguiendo las reglas.

¿Y si en lugar de empezar siempre con un profesor, empezásemos con un no-profesor?

¿Y si no ponemos ninguna condición sobre el primer asiento?

5. Sillas en fila: la versión antisocial

Aquí tenemos la versión antisocial del problema de las sillas, que algunos llaman la versión británica. No porque los británicos tengan nada de malo, sino porque tienen fama de ser muy reservados a veces, de modo que prefieren que un extraño no se siente a su lado si pueden evitarlo. Así que esta vez consideramos filas de sillas de diferente longitud, pero no permitimos que nadie se siente junto a nadie. Puede no haber nadie en una fila, o sólo una persona, pero siempre que haya dos personas o más, cada uno debe estar separado de los demás por al menos una silla vacía.

Aquí tenemos una fila de una silla, vacía: –

y aquí una fila de una silla, ocupada: **P**

así que hay dos formas de llenar una fila de una silla.

Si tenemos una fila con 2 sillas, hay 3 formas de ocuparla: – –, –**P** y **P**–.

Para 3 sillas, tenemos 5 posibilidades: – – –, – –**P**, –**P**–, **P**– –, **P**–**P**.

¿Qué pasa para 4 sillas? ¿5? ¿n?

6. Saltando por las piedras

Hay algunas piedras colocadas de forma que permitan cruzar un pequeño río. Desde cada piedra, tienes dos posibilidades: dar un paso hasta la siguiente piedra, o dar un salto sobre la primera piedra, para aterrizar en la segunda. ¿Cuántas formas hay de volver a la orilla si estamos en la piedra n-ésima?

Si estás en la piedra número 1, lo único que puedes hacer es dar un paso hasta la orilla: **P**. Así que sólo hay una forma de llegar a la orilla.

Si estás en la piedra número 2, puedes dar un paso hasta la piedra 1, y otro de allí a la orilla (**PP**), o puedes saltar directamente a la orilla sobre la piedra 1 (**S**): 2 formas.

Desde la piedra número 3, puedes hacer **PPP**, **SP** o **PS**: 3 formas. ¿Por qué aparecen los números de Fibonacci?

7. Números de Fibonacci, para cambiar (moneda)

Si sólo tenemos monedas de 1 y 2 euros, ¿de cuántas formas podemos pagar una cierta cantidad, por ejemplo, n euros? Vamos a tener en cuenta el orden en el que damos las monedas (no es lo mismo dar primero una de 2 euros y luego una de 1, 2+1, que dar primero una de 1 y luego una de 2, 1+2). Por ejemplo, para pagar

1 euro = 1, sólo hay 1 forma.

2 euros=1+1=2, hay 2 formas.

3 euros=1+1+1=1+2=2+1, 3 formas.

A estas alturas, ya sabrás de cuántas formas distintas se pueden pagar 4 euros, 5, y cuál es la solución general al problema. El reto es explicar por qué vuelven a aparecer los números de Fibonacci. ¿Podrías encontrar una relación sencilla entre este problema y el de las piedras?

Continuación: ¿y si nos interesa sólamente la colección de monedas, y no el orden en que se dan? Entonces, para nosotros es lo mismo 2+1 que 1+2. ¿Cuántas colecciones distintas hay de monedas de 1 y 2 euros que totalicen una cierta cantidad n?

8. Sin el uno

Supón que tienes una colección de regletas de distintas longitudes enteras: 1 (cubos), 2, 3, 4, 5, etc. Tienes un número indefinidamente grande de regletas de cada longitud. Pero un malo malísimo te roba todas las de longitud 1. ¿De cuántas formas posibles puedes construir una fila de longitud n con las regletas restantes? Por ejemplo,

longitud 2: 2 (1 forma)

longitud 3: 3 (1 forma)

longitud 4: 4=2+2 (2 formas)

longitud 5: 5=3+2=2+3 (3 formas).

La formas en las que un número natural n se puede descomponer en suma de otros números naturales se llaman las *particiones* de n. Así que lo que nos estamos preguntando es cuántas particiones podemos hacer de un número n, si no usamos el 1, y el orden de los sumandos importa. Sí, en efecto, la respuesta vuelve a estar en los números de Fibonacci. ¿Por qué?.

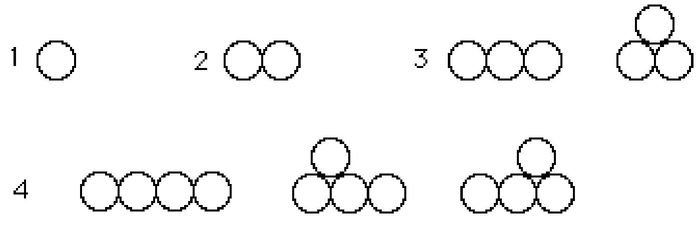
9. El fraude de Fibonacci

Uno de los dos problemas siguientes no tiene que ver con los números de Fibonacci, a pesar de las apariencias. ¿Cuál?

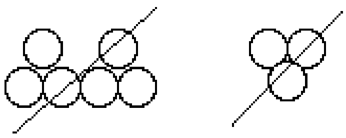
a) Coloca n monedas siguiendo estas dos condiciones:

Cada moneda debe tocar a su vecina (o vecinas) de fila.

Cada moneda, excepto las de la fila inferior, debe tocar dos monedas de la fila que tiene debajo.

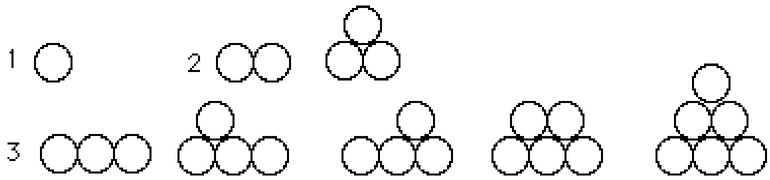


La primera condición establece que no hay huecos en ninguna fila, y la segunda, que las filas de arriba son siempre más cortas que las de abajo. Así que la siguientes configuraciones no son válidas:



Si hay $P(n)$ configuraciones válidas para n monedas, ¿son los $P(n)$ siempre números de Fibonacci?

b) Este problema es muy similar al anterior, pero ahora $P(n)$ cuenta el número de configuraciones con n monedas en la fila inferior.



Como ves, ahora $P(1) = 1$ y $P(2) = 2$, pero $P(3) = 5$. Nos hemos saltado un número de Fibonacci, el 3. De hecho, $P(4) = 13$, así que no tenemos la sucesión de Fibonacci, pero sí los números de Fibonacci tomados de forma alterna, es decir, uno sí, uno no. ¿O quizá no?

Todos estos problemas, y muchos más, aparte de muchísima información y datos curiosos acerca de los números de Fibonacci, los tienes (en inglés) en

http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fib.html.