# ECUACIONES DIOFÁNTICAS

1. ¿Recuerdas el problema en el que afirmábamos que podíamos pagar cualquier cantidad a partir de 8 euros usando sólo billetes de 3 y 5 euros? Traducido al lenguaje de las ecuaciones, esto quiere decir que la ecuación

$$3x + 5y = N$$

siempre tiene soluciones enteras positivas $x$ e $y$, sea cual sea el número natural $N > 7$. Pues bien, en este caso el problema consiste en hallar *todas* las posibles soluciones enteras $x$ e $y$ para la ecuación

$$3x + 5y = 7.$$

2. Encontrar también todas las posibles soluciones enteras de $3x - 12y = 7$.

3. ¿Te atreves con $1990x - 173y = 11$?

4. Si has llegado hasta aquí, ya eres capaz de resolver (es decir, encontrar todas las soluciones $x, y$ enteras) cualquier ecuación de la forma $Ax+By = C$, donde $A, B$, y $C$ son enteros, es decir, cualquier *ecuación diofántica lineal general de dos variables*. ¿Podrías describir cómo? Haz la prueba con $21x + 48y = 6$. (Las ecuaciones con más de una variable en las que se buscan soluciones enteras se llaman diofánticas en honor del matemático griego Diofanto de Alejandría).

5. Encuentra las soluciones enteras de $2x + 3y + 5z = 11$.(Por cierto, ¿tiene esta ecuación alguna solución en los naturales?)

6. Intenta resolver la siguientes ecuaciones, (*Pista:* la idea es transformarlas apropiadamente y analizando después caso por caso).

$$(2x + y)(5x + 3y) = 7$$
$$xy = x + y + 3$$
$$x^2 = 14 + y^2$$
$$x^2 + y^2 = x + y + 2$$

7. Estas otras ecuaciones permiten encontrar todas sus soluciones (o quizá demostrar que no tienen ninguna solución), considerando, en vez de los números o variables que aparecen, sus restos al dividir por algún número

natural:

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= 4z-1 \\ x^2-7y &= 10 \\ x^3+21y^2+5 &= 0 \\ 15x^2+7y^2 &= 9 \\ x^2+y^2+z^2 &= 8t-1 \\ 3^m+7 &= 2^n \\ 3\cdot 2^m+1 &= n^2 \end{aligned}$$

(los dos últimos son más difíciles, porque además de esta idea hay que usar la pista del ejercicio anterior).

8. En las ecuaciones diofánticas de este ejercicio, puede resultarnos útil usar alguna desigualdad...):

$$\begin{aligned} 1/a+1/b+1/c &= 1 \\ x^2-y^2 &= 1988 \\ x^3+3 &= 4y(y+1) \end{aligned}$$

9. Demostrar que $1/x-1/y=1/n$ tiene exactamente una solución si, y sólo si, $n$ es primo.

10. Estos dos son mucho más difíciles que los demás problemas de la hoja. Si quieres probar a hacerlos y te atascas, puede que Luis te de una pista... ¡Que te diviertas!

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= z^2 \\ x^2-2y^2 &= 1 \end{aligned}$$