



Fundación  
Vodafone  
España



Luis Hernández Corbato

04-11-2017

## PRINCIPIO DEL PALOMAR

Este principio parece muy natural y obvio pero usado con astucia puede convertirse en un arma útil para resolver problemas. El primero que formuló el principio de manera formal fue el matemático alemán Dirichlet en el siglo XIX, pero seguro que muchos otros lo habían utilizado con anterioridad. El enunciado es el siguiente:

*Si  $n$  palomas ocupan  $m$  nidos, y  $n > m$ , entonces en un nido habrá al menos dos palomas.*

Otra formulación, que proporciona algo más de información es la siguiente:

*Si  $am+1$  palomas ocupan  $m$  nidos, entonces en un nido habrá al menos  $a+1$  palomas.*

### Ejemplos rápidos o no tan rápidos:

1. Demuestra que en un grupo de 13 personas siempre hay 2 que cumplen años el mismo mes.
2. ¿Cuántas personas tendría que haber en una sala para asegurar que hay 3 que cumplen años el mismo día?
3. Una diana tiene la forma de un triángulo equilátero de lado 2. Prueba que si tiramos 5 dardos a la diana habrá dos que se quedarán clavados a distancia  $\leq 1$ .
4. Escoge 12 números de dos cifras cualesquiera, demuestra que siempre habrá dos cuya resta tendrá la forma  $aa$ .
5. Supongamos que hay  $n$  personas en una reunión, y no todas se conocen entre sí. Demuestra que hay al menos dos personas que tienen el mismo número de conocidos.

Una aplicación ingeniosa del Principio del Palomar permite probar lo siguiente:

### Teorema de Erdős-Szekeres:

Sean  $n$  y  $m$  dos números naturales. Sea  $A$  el conjunto formado por los números naturales del  $1$  al  $(n-1) \cdot (m-1) + 1$  colocados en orden aleatorio. Entonces podemos encontrar en  $A$  una subsucesión de  $n$  términos creciente o una subsucesión de  $m$  términos decreciente.

### Ejemplo:

Pongamos, por ejemplo,  $n = 4$ ,  $m = 3$ . El conjunto  $A$  está formado por los números del 1 al 7, una posibilidad sería:  $A = \{2, 5, 1, 7, 3, 4, 6\}$

- ¿Podemos encontrar una subsucesión en  $A$  de 3 términos que sea **decreciente**?

La respuesta es negativa.

- ¿Podemos encontrar una subsucesión en  $A$  de 4 términos que sea **creciente**?

Sí, por ejemplo tomar **2, 3, 5**, que se encuentran en dicho orden en  $A$ :

$$A = \{2, 5, 1, 7, 3, 4, 6\}$$

Comprobamos así que **en este caso particular** se cumple el teorema.

### Demostración del teorema:

Paso 1: A cada número  $k$  del conjunto  $A$  le vamos a asignar dos números,  $C_k$  y  $D_k$ .

$C_k$  representa la longitud de la subsucesión creciente más larga cuyo último elemento es  $k$ .

$D_k$  representa la longitud de la subsucesión decreciente más larga cuyo último elemento es  $k$ .

Paso 2: Tomemos dos elementos del conjunto  $A$ , los números  $a$  y  $b$ , tales que  $b$  aparece más tarde que  $a$  según recorremos el conjunto.

$$A = \{\dots, a, \dots, b, \dots\}$$

Demuestra que tiene que ocurrir,  $C_a \leq C_b$  o  $D_a \leq D_b$ .

Paso 3: Ahora a cada número  $k$  le asignamos la pareja de números  $(C_k, D_k)$ . ¿Puede ocurrir que para dos números distintos la pareja de números que asignamos sea la misma?

Paso 4: Supón por un momento que el teorema es falso. ¿Cuántas posibilidades hay para el número  $C_k$ ? ¿Y para el  $D_k$ ? ¿Y para el par  $(C_k, D_k)$ ?

Paso 5: Utiliza el Principio del Palomar para llegar a una contradicción. ¡Fin!

### Problemas

1. Demuestra que en un grupo de 6 personas siempre hay 3 que se conocen entre ellas o 3 que no se conocen entre sí.

2. En el interior de un cuadrado de 1m de lado se han marcado 51 puntos. Prueba que algún conjunto de tres de esos puntos se puede cubrir con un cuadrado de 20cm de lado.

3. Sea  $B$  un conjunto de 17 números enteros. Demuestra que existe un subconjunto de  $B$  tal que la suma de sus elementos es múltiplo de 17.

4. a) Demuestra que existe un número entero cuya expresión decimal está constituida exclusivamente por "ceros" y "unos" (100101...) y que es divisible por 2017.

b) Demuestra que existe un número entero cuya expresión decimal está constituida exclusivamente por "unos" (111...1) y que es divisible por 2017.

5. Se escogen  $n+1$  elementos del conjunto  $\{1, 2, \dots, 2n\}$ . Prueba que hay dos tales que uno es divisible por el otro.