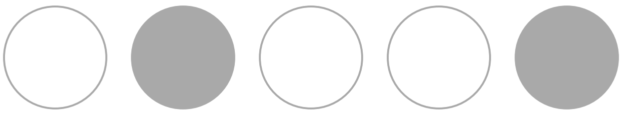
Luis Hernández Corbato 28 de octubre 2017

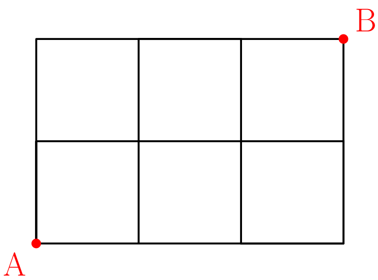
BIYECCIONES Y NÚMEROS DE CATALAN

Contando con los dedos de las manos...

1. ¿De cuántas formas se pueden poner en fila tres canicas blancas y dos grises?



2. ¿Cuántos caminos van de A a B sin retroceder?



¿Son iguales los resultados? ¿Por qué?

Imagina que tuviéramos cuatro canicas blancas y dos grises, ¿dónde tendríamos que poner A y B en la cuadrícula para que los caminos se correspondieran con las filas de canicas? ¿Y si tenemos tres blancas y tres grises?

¿Se te ocurre algún otro problema con las mismas soluciones que los dos anteriores?

> Una **biyección** es una correspondencia entre dos conjuntos que a cada elemento de un conjunto asocia uno y solo uno del otro conjunto.
>
> Decimos que dos conjuntos tienen el mismo **cardinal** si puedo construir una biyección entre ambos.

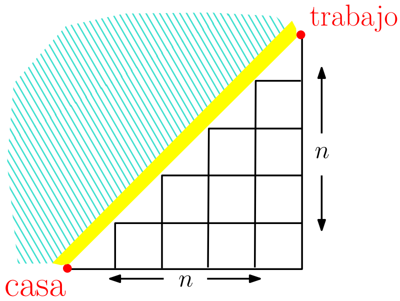
Dos conjuntos con el mismo cardinal... ¿pueden tener distinto número de elementos?

¿Qué sucede cuando tienen infinitos elementos?
El conjunto de los números enteros, $\mathbb{Z}$, y el de los números pares ¿tienen el mismo cardinal?

Intenta resolver los siguientes problemas. **¡Primero calcula los valores para n pequeño!** A continuación, prueba a establecer biyecciones entre unos problemas y otros.

Problema 1: Te dan n papeletas con el número 1 y n papeletas con el número -1. Tienes que colocarlas en orden de tal manera que la primera papeleta es mayor o igual que 0, que la suma de las dos primeras papeletas es mayor o igual que 0, que la suma de las 3 primeras papeletas es también mayor o igual que 0 y así sucesivamente. ¿De cuántas maneras puedes hacerlo?

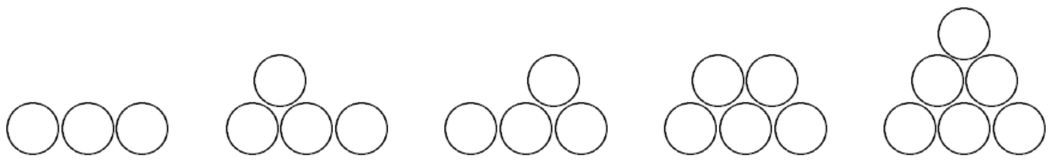
Problema 2: Imagínate que te has mudado a una casa en la playa al ladito del mar. Has tenido mucha suerte porque no sólo tu casa sino también el trabajo está en la costa, como muestra la figura. La pena es que los planes urbanísticos para tu nueva ciudad fueron un absoluto desastre, ¡no hay paseo marítimo para ir directo de casa al trabajo! Como consecuencia, hay muchas maneras distintas de ir de casa al trabajo caminando la distancia mínima. ¿Podrías calcular cuántas?



Problema 3: Calcula el número de secuencias $1 = a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ tales que $a_i \leq i$. Por ejemplo, si $n = 3$, tenemos las siguientes secuencias:

111 112 113 122 123

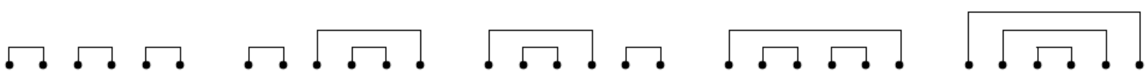
Problema 4: Determina el número de maneras de apilar círculos de forma que la fila de abajo tenga n círculos.



Problema 5: Halla el número de secuencias $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tales que $a_1 = 0$ y $0 \leq a_{i+1} \leq a_i + 1$. Por ejemplo, si $n = 3$, las secuencias son: $000, 001, 010, 011, 012$.

¿Puedes dar una fórmula que permita calcular las soluciones? Quizá te resulte te ayuda el siguiente problema:

Problema 6: Calcula el número de maneras de conectar $2n$ puntos en fila con arcos como en la figura sin que se corten.

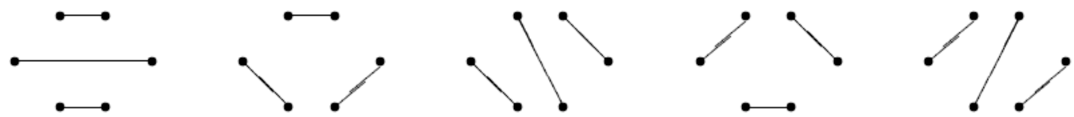


Buscamos una fórmula para n que dependa de las soluciones con valores de n más pequeños, es decir, una **recurrencia**.
Los números que resultan se llaman **números de Catalan**, en honor de un matemático *belga* del siglo XIX.

Prueba a demostrar que las siguientes cantidades también vienen dadas por el número de Catalan.

1. ¿De cuántas maneras diferentes se puede triangular un polígono regular de $n+2$ lados? Consideraremos que aunque una triangulación sea igual que otra rotando la figura o haciendo una simetría se trata de triangulaciones diferentes.

2. Cuenta el número de maneras de conectar $2n$ vértices de un polígono convexo sin que las aristas se intersequen.



3. ¿Cuántos árboles binarios (cada vértice tiene 0 o 2 hijos) con $n+1$ hojas existen?

4. Tu objetivo es teselar la figura de abajo usando n rectángulos, ¿de cuántas maneras se puede hacer?