Jugando con paridad

Comenzamos con los siguientes juegos:

Eligiendo signos: Escribid los números del 1 al 8 en fila. Por turnos, id poniendo los signos "+" o "-" delante de cada número, teniendo en cuenta lo siguiente: el jugador que tenía el primer turno intenta conseguir que el resultado final sea impar, y el otro que el resultado sea par. ¿Qué jugador gana? ¿Qué estrategia debe seguir?

Unos y doses: Escribid 4 unos y 4 doses en un papel. En cada jugada, se tacharán dos números y se escribirá uno, el objetivo del jugador que empieza con el turno es que el último número que quede escrito sea un 1, y el de su contrincante es que al final quede un 2. ¿Cómo se juega? en cada turno se eligen dos números, se tachan y se escribe un 2 si eran iguales y un 1 si eran diferentes. ¿Quién tiene una estrategia ganadora? ¿La puedes describir?

Observad que, tras analizarlos, ambos juegos han resultado bastante semejantes. ¿Qué cantidad es la que no varía independientemente de qué estrategia se tome?

Pensando una estrategia...

Piedras en fila: Andrea y Berto colocan 7 piedrecitas en una fila y juegan de la siguiente forma. Alternativamente, comenzando Andrea, retiran una, dos o tres piedras de la fila. Ganará quien se quede con la última piedrecita. ¿Quién puede asegurarse la victoria independientemente de cómo juegue el otro, Andrea o Berto? ¿Y si en lugar de 7 hay otro número de piedras al comenzar? Describe la estrategia.

En este juego la paridad no tiene un papel relevante. La clave es utilizar una especie de estrategia "espejo". Sin embargo, en el próximo juego la paridad sí es importante.

Divisores: Alicia y Borja juegan al siguiente juego. Comenzando con un número inicial arbitrario en la pizarra, alternativamente, en cada turno restan al número de la pizarra uno de sus divisores. Pierde el que escribe un 0. Si comienza Alicia:

1. Comienza con números pequeños, cuando el número inicial en la pizarra está entre 1 y 10, ¿quién gana en cada caso?

2. ¿Observas algún patrón en los resultados? ¿Qué jugada se debe hacer en cada caso para ganar?

3. Inventa una estrategia ganadora o demuestra quién debe ser el ganador.

Nim

El Nim es un juego muy antiguo que generaliza al de las piedrecitas que hemos discutido anteriormente. Las reglas son simples, se comienza con varias filas, no solo una, de piedrecitas y en cada turno cada jugador elige una fila y retira un número cualquiera de piedrecitas (al menos una) en esa fila. Gana quien quita la última piedra.

Dos filas: Para abrir boca, examina el caso en que tenemos simplemente dos filas y Andrea comienza a jugar. ¿Cuándo se puede asegurar la victoria? ¿Qué estrategia debe seguir?

Tres filas: Las opciones se multiplican, por eso nos vamos a centrar en estas situaciones

- La primera fila solo tiene una piedra. ¿Quién gana ahora? ¿En qué se parece esta configuración a la de dos filas?
- Prueba ahora con las siguientes configuraciones de piedras:

  $$\{2,3,3\},\{2,3,5\},\{3,4,5\},\{2,4,5\}.$$

  En los 4 casos siempre gana Andrea, ¿cuál es la primera jugada de la estrategia que debe seguir?
- Examina los 4 casos anteriores poniendo los números de piedras en cada fila como suma de potencias de 2. Por ejemplo, $3 = 2^0 + 2^1, 4 = 2^2, 5 = 2^0 + 2^2$. ¿Cuántas potencias de 2 de cada exponente hay en total entre las tres filas? Relaciona ese número con la jugada ganadora de Andrea.

Describe la estrategia ganadora en el Nim:

Divisores: La clave es que si en la pizarra hay un número impar necesariamente en el siguiente turno habrá uno par. Si te toca un número par, jugando un divisor impar después del turno del otro te devolverá otra vez un número par.

Nim: El jugador que comienza tiene estrategia ganadora si la Nim-sum de las filas no es 0. Su primera jugada la deja a 0. El Nim-sum de las filas es el XOR potencia de 2 por potencia de 2.

Por ejemplo la jugada ganadora en la configuracion 2, 3, 5 es quitar 4 de la tercera fila (porque la nim-sum de $2+3+5 = 4$) y la de 3, 4, 5 es 2 de la primera fila, y la de 2, 4, 5 es quitar 1 de la primera fila.