Contando cosas (¡de maneras distintas!)

En esta sesión vamos a generalizar (un poco) un resultado que se vió en sesiones anteriores de teoría de grafos, el denominado L*ema del apretón de manos.*

Para ello vamos a generalizar este resultado tan útil, demostrando algo más general: para explicar esto, voy a organizar una merienda con algunos de mis amigos:

	Pan	Embutido	Tortilla	Coca-Cola
Yo		X	X	X
María	X			X
Pedro		X	X	
Juan	X	X		X
Ana		X	X	

Q: ¿Cuántos productos son aportados (en total) a la merienda?

Observar lo siguiente: como seres humanos que somos, hemos contado "cruz a cruz", y eso puede hacerse *por filas* o bien *por columnas* (se podría hacer en diagonal, pero esto es complicarse!)

Q: ¿Qué información tiene cada fila? ¿Y cada columna?

Por lo tanto, podemos contar el número de cruces de *dos maneras distintas*: por filas y por columnas. Vamos a generalizar estas ideas a una tabla genérica: supongamos ahora que tenemos *n* personas (que llamaremos $a_{1,} a_{2,} \ldots, a_r$) y que tenemos una merienda mucho más refinada (con $b_{1,} b_{2,} \ldots, b_s$ productos distintos). Llamemos al conjunto de las *a* y *b, A* y *B,* respectivamente.

Una tabla posible sería la siguiente:

	b_1	b_2	b_3	b_4	$\cdots$	b_s
a_1	X		X	X		X
a_2		X				
a_3		X	X			X
a_4				X		
a_5	X					X
$\vdots$					$\ddots$	$\vdots$
a_r		X	X		$\cdots$	X

Vamos a modelar el hecho que "sumar por filas es igual que sumar por columnas". Para ello, vamos a considerar parejas ordenadas de la forma (a_i, b_j), con a_i elemento de *A,* b_j elemento de *B.* El problema es entonces el de contar el número de elementos en un subconjunto de $A \times B$.

Q: Interpretar la fórmula matemática siguiente en términos de conteos en *filas* y *columnas*:

$$\sum_{a\in A} \left|\{(a,b):\, b\in B\}\right| = \sum_{b\in B} \left|\{(a,b):\, a\in A\}\right|.$$

Esta fórmula se conoce como *fórmula del doble conteo.* Como veremos, escogiendo adecuadamente el conjunto A y el conjunto B y aplicando posteriormente esta fórmula podremos concluír relaciones interesantes.

¡Formemos comités!

Vamos a utilizar la fórmula del doble conteo para demostrar una identidad combinatoria con esta que ya vimos en una sesión anterior:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Q: ¿Como se demostraba esta fórmula? (Pista: recordar el triángulo de Pascal...).

Vamos a demostrar muy parecida, que con el triángulo de Pascal parece no poderse demostrar. Para ello vamos a considerar el problema siguiente: tenemos n personas que quieren formar un comité, y sean A el conjunto de personas y B el posible conjunto de comités (B puede también ser el conjunto vacío o el conjunto total).

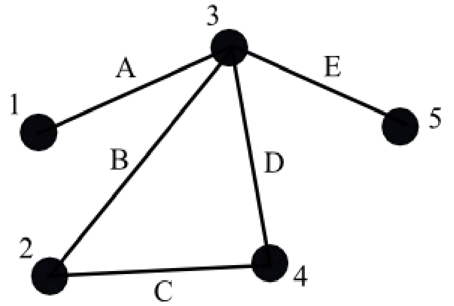
Q: ¿Qué subconjunto de $A\times B$ debemos considerar?

Q: Aplicar la fórmula del doble conteo en este problema. ¿Qué relación combinatoria obtenemos?

Lema del apretón de manos

El *Lema del apretón de manos* en grafos puede contextualizarse en el marco del doble conteo. Nuestro objetivo en el lema del apretón de manos era el de relacionar aristas y vértices en un grafo, y más concretamente el de relacionar el número de aristas con el *grado* de los vértices (recordar que el grado de un vértice es el número de aristas incidentes).

Q: Codificar la tabla para el lema del apretón de manos para el grafo que se indica:



Q: Modelar el problema para un grafo en general. ¿Qué conjuntos tomamos para A y para B? ¿Qué conjuntos ?

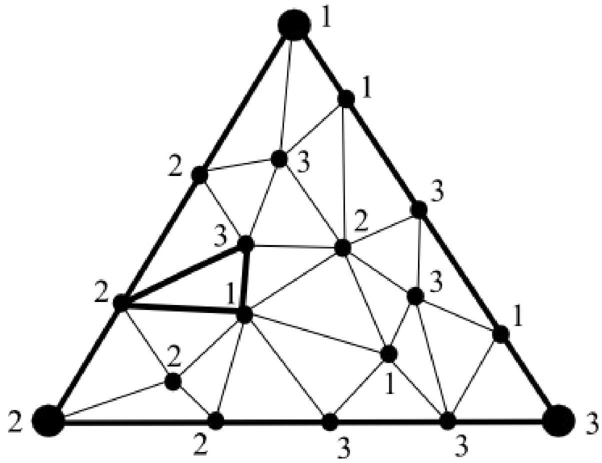
Lema de Sperner

Vamos finalmente a aplicar el Lema del apretón de manos a un resultado más dificil, el denominado Lema de Sperner.

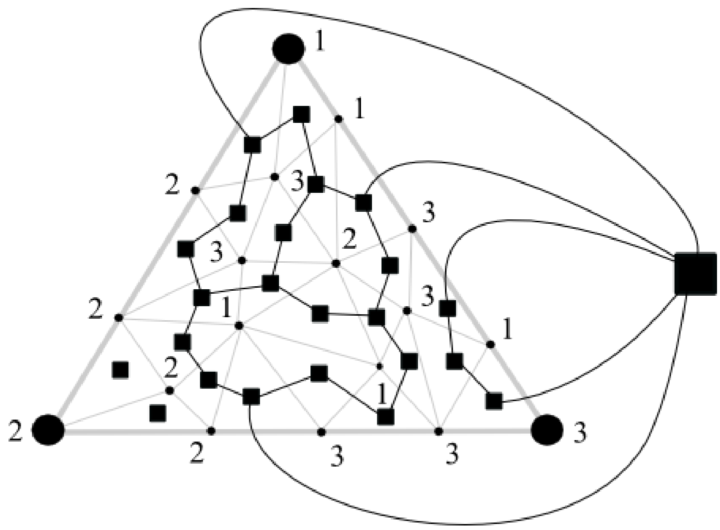
Veamos que dice el Lema de Sperner: imaginemos que tenemos un triángulo como el que se indica en la figura. Vamos a dibujar vértices en su interior y en su borde y vamos a *triangular* su interior (es decir, vamos a dibujar triangulitos utilizando los vértices que hemos dibujado).

El siguiente paso consiste en pintar los vértices con tres colores, con la condición que los vértices del triángulo inicial lleven 3 colores distintos (1,2, y 3), y que además en cada una de las aristas definidas los colores sólo puedan ser de dos tipos (ver Figura).

Vamos a demostrar que con estas condiciones siempre existe un triángulito con 3 vértices de color distinto! Ver el ejemplo:



Una pista será muy bienvenida: vamos a dibujar un nuevo grafo, del siguiente modo: vamos a pintar un vértice en cada triángulito, y vamos a dibujar una arista una arista entre dos vértices incidentes si la arista que los delimita tiene distinto color (Ver Figura)



Q: ¿Qué grados pueden tener los vértices internos de este nuevo grafo?

Q: Dibuja cómo pueden ser los vértices internos.

Q: Aplicar el Lema del apretón de manos en este caso. ¿Qué debemos demostrar para que se cumpla lo que queremos? (Indicación: un número impar positivo es distinto de *0!*)

Q: (Esta es la parte más difícil!) Justificar que el vértice exterior tiene grado impar.