4 Algo sobre números primos

4.1 Sesión 1

1. Completa esta definición: “Un número primo es un número natural que...
2. ¿Por qué no consideramos primo el 1?

   En estos sábados vas a ver que hay infinitos números primos. Pero ahora vamos a ver solamente los primos menores que 200, por ejemplo. Eratóstenes, un griego que vivió por el año 200 antes de Cristo, desarrolló un método para hallar números primos que todavía se utiliza hoy, y que seguro que lo has oído. Se llama Criba de Eratóstenes. Vamos a recordar en qué consiste.

3. Escribe en una cuadrícula, por ejemplo de 20×10, los doscientos primeros números naturales. Rodea con un círculo el primer número primo, el 2, y tacha los restantes múltiplos de 2. Haz ahora lo mismo con el 3, con el 5, con el 7, con el 11, y con el 13.
4. ¿Cuál es el siguiente primo? ¿Queda algún múltiplo de él, distinto a él, que no haya sido tachado?
5. Escribe todos los números que no has tachado. Esos son todos los primos menores de 200.
6. Acabas de escribir todos los primos menores que 200, aplicando la Criba de Eratóstenes solamente hasta el 13. ¿Es un número primo el 221?
7. ¿Hasta dónde has tenido que ir dividiendo para saber si era primo el 221?
8. Yo sé que 227, por ejemplo, es un número primo. Para comprobarlo, he visto si era divisible por 2, por 3, por 5, por 7, por 11, etc. O sea, he ido dividiendo por primos menores que él. Un primo menor que él, es, por ejemplo, 29. ¿Tú crees que he llegado a dividir hasta por 29 para decidir que 227 era primo?
9. ¿Hasta qué primo tienes que dividir para saber si un número N cualquiera es primo?
10. Escribe 5 números compuestos consecutivos. Ahora escribe 6 compuestos consecutivos.
11. ¿Es primo o compuesto el número $2{\cdot}3{\cdot}{\cdot}5{\cdot}7{\cdot}11{\cdot}13+3$? ¿Y el $2{\cdot}3{\cdot}4{\cdot}5{\cdot}6{\cdot}7{\cdot}8{\cdot}\ldots{\cdot}107+93$?
12. ¿Crees que puedes encontrar 5000 compuestos consecutivos? Explica como lo harás.

4.2 Sesión 2

Hay parejas de números primos cuya diferencia es 2. Por ejemplo 11 y 13. Suelen llamarse **primos gemelos**.

1. Escribe todas las parejas de primos gemelos menores de 200.

2. Obtén la suma de cada una de estas parejas. ¿Ves alguna curiosidad en las sumas? Enuncia y demuestra alguna propiedad sobre la suma de primos gemelos.

3. Obtén ahora el producto de cada una de estas parejas. ¿Ves algo digno de destacar en los productos? Enuncia y demuestra alguna propiedad sobre el producto de primos gemelos.

4. Escribe la última cifra de cualquier primo mayor que 5 y explica por qué esa última cifra tiene que ser una de las que has escrito.

5. Divide algunos números primos mayores que 4 entre 6, escribe el resto de la división que obtienes y explica por qué esos son los únicos restos posibles al dividir un primo mayor que 4 entre 6.

6. El sábado pasado obtuviste "lagunas" de números primos, es decir, números compuestos consecutivos, tantos como quisieras. Recuerda: si te pedían 11 enteros consecutivos com-puestos, formabas los números $12!+2$, $12!+3$, ..., $12!+12$. ¿Podrías encontrar otros 11 enteros consecutivos menores que los anteriores?

7. Se han hecho intentos de encontrar fórmulas que solo dieran números primos. Por ejem-plo: en n^2-n+41 sustituye n por 1, 2, 3, 4, etc. y obtendrás números primos, pero ¿obtendrás siempre números primos? Escribe un valor de n que al sustituirlo en esa fórmula dé un número compuesto.

8. ¿Puede haber un número primo mayor que todos los demás?

   Imagínate por un momento que lo hubiera. Llámale K.

   Considera el número $N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot K + 1$, es decir, al producto de todos los primos menores o iguales que K le sumas 1. Si K era el mayor número primo, este número N, que es obviamente mayor que K, debe ser ... Entonces debe tener algún divisor primo. ¿Es 2? ... ¿Es 3? ... ¿Es K? ... ¿Qué ocurre entonces?

   Acabas de ver que el conjunto de números primos es infinito. Pero ¿y el conjunto de primos gemelos? ¿Habrá infinitas parejas? Nadie ha probado hasta ahora ni que sí ni que no.

9. Escribe algunos pares mayores que 2 como suma de dos números primos. Un matemático del siglo XVIII, Christian Goldbach, pensó que cualquier par mayor que 2 era suma de dos números primos, pero nadie ha probado hasta ahora ni que sea cierto ni que sea falso.

10. Goldbach también conjeturó que cualquier entero par mayor o igual que 6 es suma de dos primos impares. Tampoco se ha demostrado que sea verdad o no, todo parece indicar que es cierto. Suponiéndola cierta esa conjetura, demuestra que cualquier entero impar mayor o igual que 9 es suma de 3 primos impares.