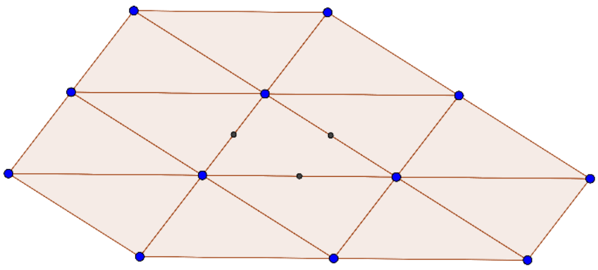
**Estalmat Madrid**
**14, 21 de enero de 2017**
**Jesús García Gual**
**Mercedes Sánchez Benito**

# Teselaciones

## A. Teselaciones unimodulares

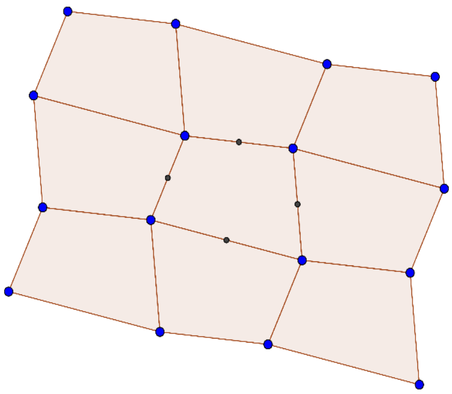
### 1. Cualquier triángulo tesela el plano

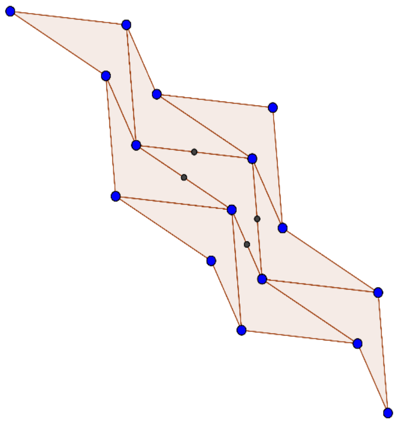


Construcción: El triángulo se transmite por simetrías centrales de centros los puntos medios de los lados y los vértices del triángulo.

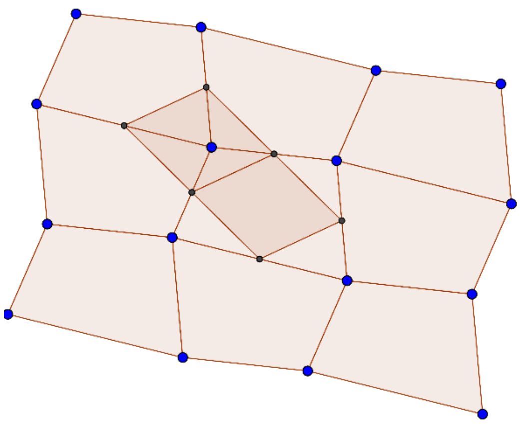
Conexiones: Un triángulo puede ser considerado como la mitad de un paralelogramo, y la evidente teselación del paralelogramo induce la del triángulo.

### 2. Cualquier cuadrilátero tesela el plano



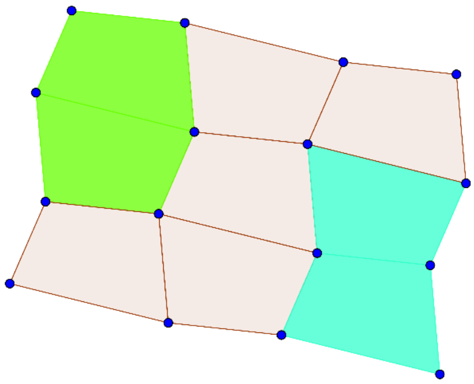


Construcción: El cuadrilátero se transmite por simetrías centrales respecto a los puntos medios de los lados del cuadrilátero. La sorpresa de que así sea, se ve aumentada cuando usando la herramienta de estirar del programa gráfico (en este caso Geogebra) pasamos a un cuadrilátero cóncavo.

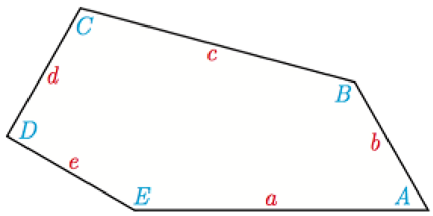


Conexiones: La teselación viene inducida por el paralelogramo que se forma uniendo los puntos medios de un cuadrilátero en el mismo orden que se recorren los vértices del cuadrilátero.

De paso podemos observar la aparición de paralelohexágonos (cóncavos y convexos) y el porqué éstos van a teselar el plano.



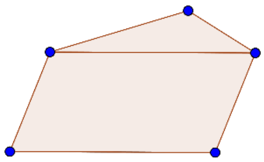
3. **Se conocen actualmente 14 familias de pentágonos que teselan el plano** (http://www.mathpuzzle.com/tilepent.html) y recientemente se ha hallado un pentágono “single” que no pertenece a esos grupos:



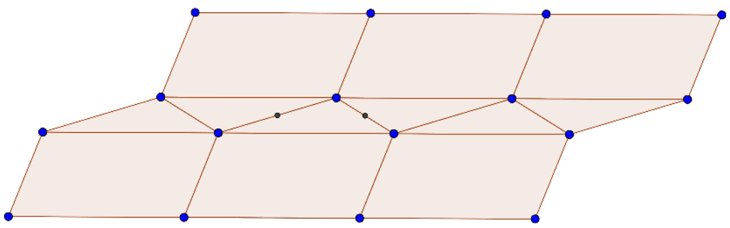

$$A = 60^\circ \qquad a = 1$$
$$B = 135^\circ \qquad b = 1/2$$
$$C = 105^\circ \qquad c = \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}$$
$$D = 90^\circ \qquad d = 1/2$$
$$E = 150^\circ \qquad e = 1/2$$

Veamos algunas sencillas teselas pentagonales:

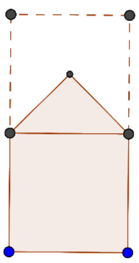
Pentágonos casita



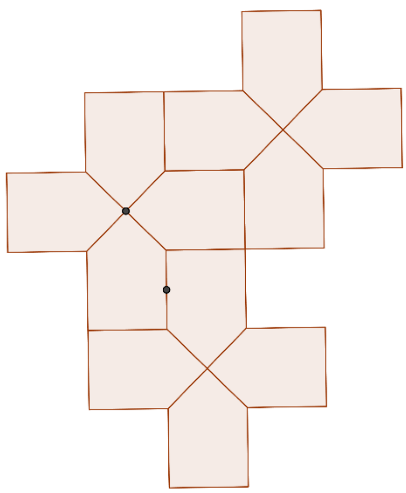
“casita de Pisa”



Construcción: Con simetrías respecto a los puntos medios de los lados del tejado creamos una teselación en forma de tira. La teselación en tiras paralelas se puede continuar de múltiples formas.

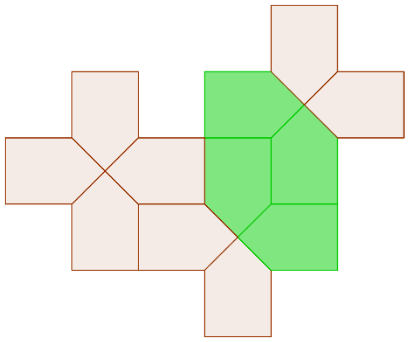


“Pentágono arquitectura”



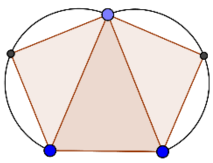
Construcción: La mayor simetría de la pieza permite teselaciones más elaboradas. La que da lugar a la aparición de cruces griegas se puede elaborar con giros de 90° con centro en el vértice del tejado, y con un centro de simetría en un punto medio de un lado vertical.

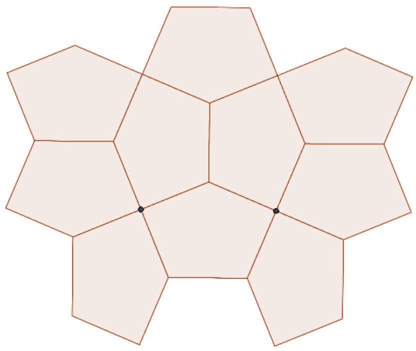
Conexiones: La pieza puede ser obtenida como división de una cruz griega o como división de un paralelohexágono en pentágonos iguales.



## La tesela Cairo

A un triángulo isósceles acutángulo le adosamos en sus lados iguales sendos triángulos rectángulos isósceles, obteniendo un pentágono con eje de simetría, con cuatro lados iguales y dos ángulos rectos no contiguos.

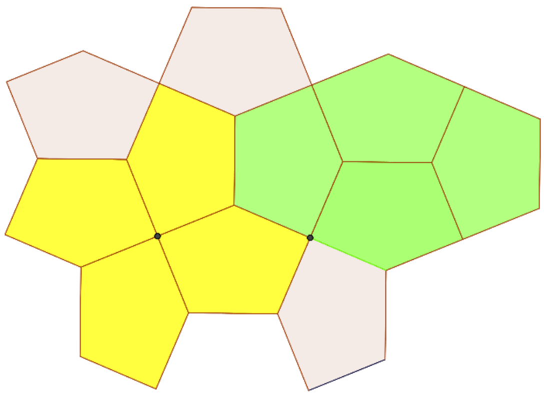




Construcción: Vamos alicatando el plano usando como centros de giro de 90° los vértices de los ángulos rectos.

Conexiones: La pieza pude aparecer a partir de una división de un paralelohexágono o de una cruz griega con sesgo en cuatro pentágonos.

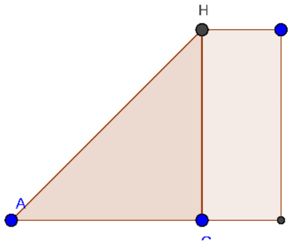
La tesela Cairo es llamada así porque es común en algunas paredes y suelos de la zona de El Cairo. Parece que serían destacables aquellas que procedieran de un triángulo isósceles especial.



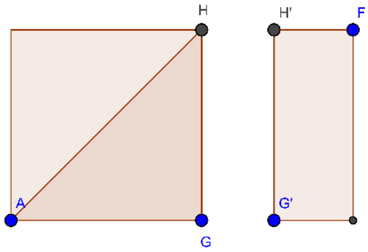
| Triángulo Isósceles | Ángulos del pentágono Cairo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| equilátero | **105º** | **90º** | **150º** | **90º** | **105º** |
| áureo | **117º** | **90º** | **126º** | **90º** | **117º** |
| De plata | **112º 30’** | **90º** | **135º** | **90º** | **112º 30’** |
| **30º, 75º y 75º** | **120º** | **90º** | **120º** | **90º** | **120º** |

**Construcción con papiroflexia de una tesela Cairo a partir de una hoja DINA:**

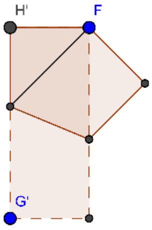

En la hoja DINA, doblando por A, hacemos que el lado corto descanse sobre el largo.



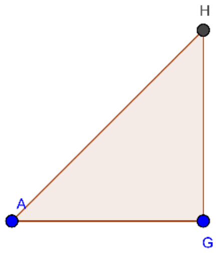

Separamos el rectángulo no solapado.




Doblamos el rectángulo de forma que G’ caiga sobre F.

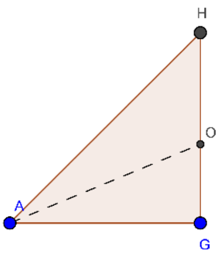



Hemos obtenido nuestra pieza Cairo de plata (en la figura se ve el triángulo isósceles con los dos triángulos rectángulos isósceles adosados).

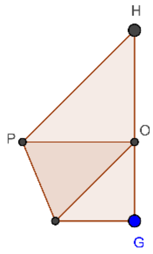



Retomamos el cuadrado doblado abandonado.

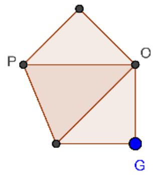
Doblando trazamos la bisectriz del ángulo en A (llevamos AG sobre AH) y desdoblamos.




Llevamos doblando A sobre O.

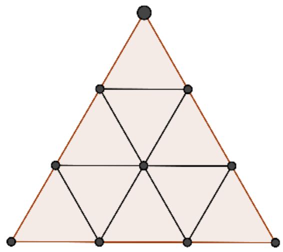


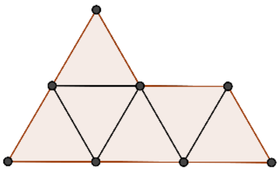

Y ya sólo queda llevar H sobre P para reconocer nuestra tesela Cairo, igual de tamaño y forma que la primera obtenida.




## La tesela esfinge

Cogemos un triángulo equilátero y lo dividimos en 9 triángulos equiláteros iguales. A la vez la figura ha quedado dividida en tres trapecios isósceles iguales. Llamamos esfinge a la figura que queda al eliminar uno de esos trapecios.

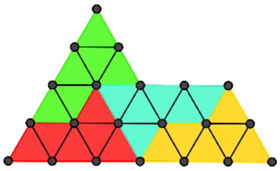




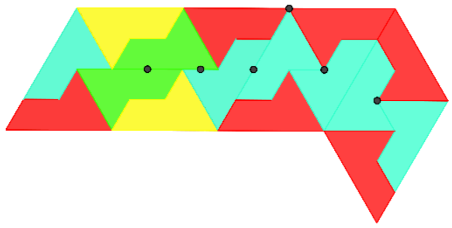
Nuestro desafío es dividir la esfinge en cuatro esfinges iguales. Y aunque no parece que la división actual de la esfinge en seis equiláteros nos sea útil, debemos saber que sí podemos dividir cada equilátero en cuatro equiláteros iguales y $6x\ 4 = 24$. ¿?

¿Y si después de hacer la división tuviéramos suerte y también fuera $4\ x\ 6 = 24$?

¡La suerte es de los audaces!

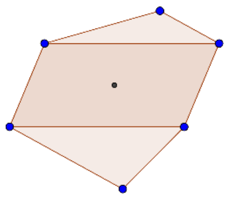


De paso observemos que dos esfinges iguales (azul y amarilla) pueden cooperar para formar un paralelogramo, pero es más bonita la división de nuestra esfinge primigenia en cuatro esfinges, una de las cuatro orientada de forma diferente. Combinando las dos opciones, podemos conseguir teselaciones *diferentes*.

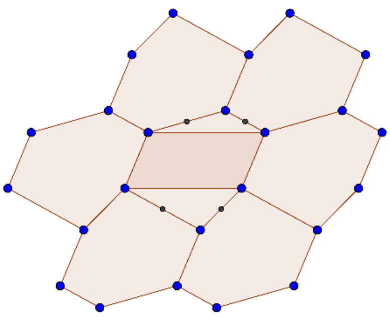


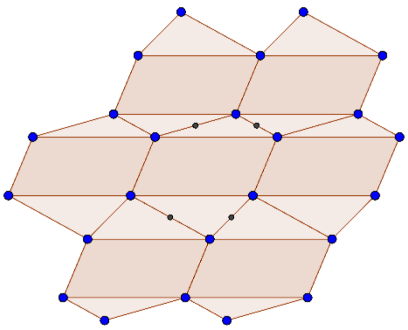
### 4. Se conocen las tres familias de hexágonos convexos que teselan el plano.

**Familia 1:** Las casitas de doble techo (un paralelogramo y dos tejados).

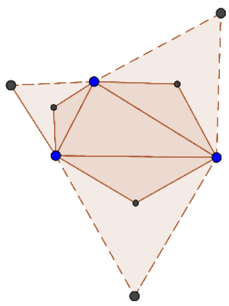


Construcción: Resulta curioso ver cómo vamos completando la teselación usando como centros de simetría los puntos medios de los lados que forman el tejado.

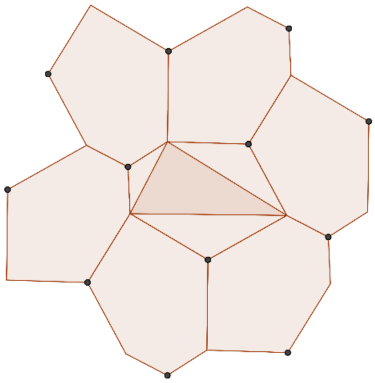




**Familia 2:** Un triángulo con tres triángulos isósceles que son tercios de equiláteros adosados a sus lados.



Construcción: Los vértices añadidos al triángulo se usan como centros de giro de 120° para completar la teselación.

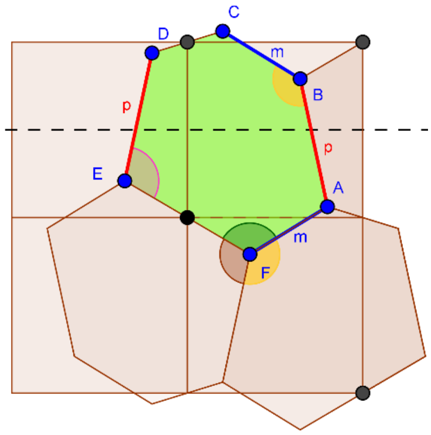


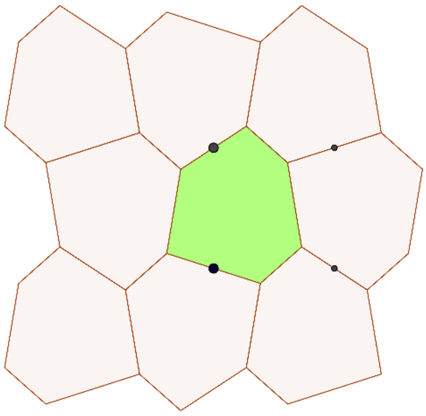
**Familia 3.** Características Polígono ABCDEF

$$\overline{AB} = \overline{DE}$$

$$\overline{BC} = \overline{FA}$$

$$\hat{B} + \hat{E} + \hat{F} = 360°$$



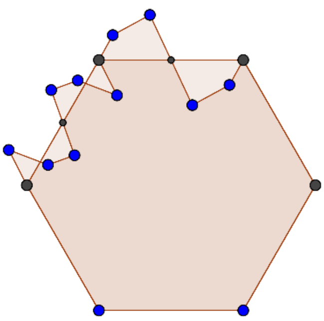



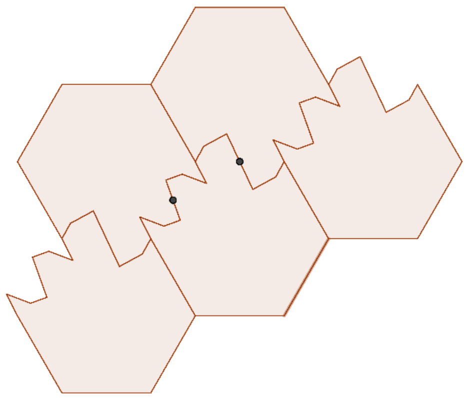
Construcción: Se necesita crear una segunda tesela aplicando una simetría con traslación a la tesela de partida, de forma que ambas queden adosadas. Luego la teselación se extiende por simetrías centrales respecto a los puntos medios de los lados sin pareja de las teselas. Observemos que para un alicatador la presencia de simetrías axiales implica la existencia de dos modelos de baldosa.

5. Ningún polígono convexo de más de seis lados tesela el plano

La razón está en que la media de los ángulos interiores de un polígono de más de seis lados es superior a 120°, y así es imposible cerrar el suelo con todos los vértices de 360°.

6. No hay límite en el número de lados de una tesela poligonal para rellenar el plano.

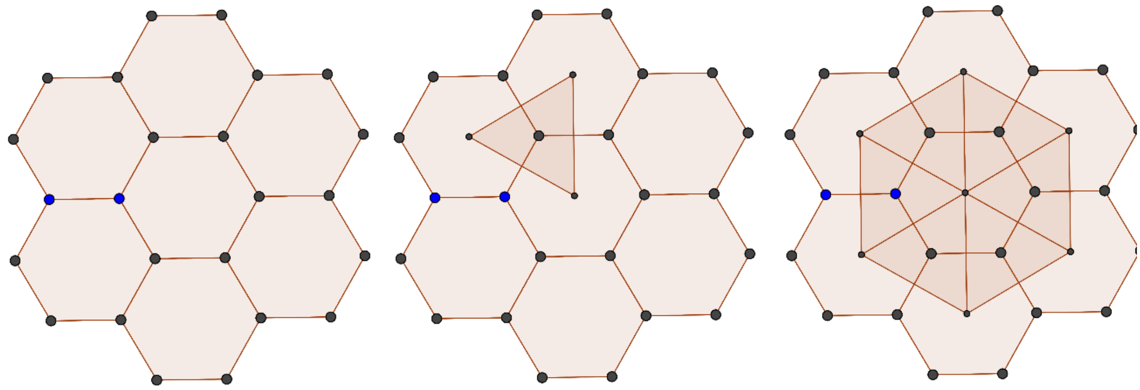




## B. Teselaciones regulares, dualidad y truncamientos

Sólo tres polígonos regulares teselan el plano.

1. **Teselación 666 y dual**

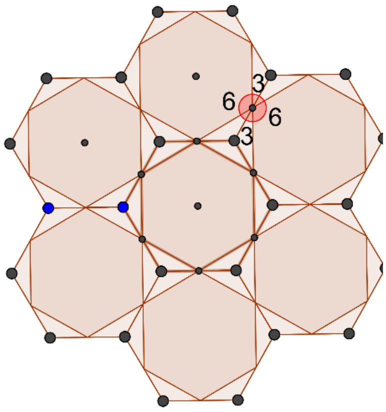


666: T. de caras de seis vértices iguales con tres caras iguales en cada vértice.

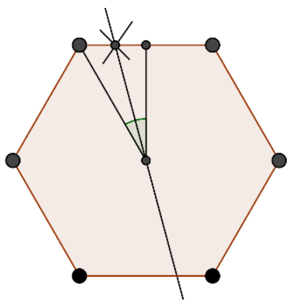
333333: T. de vértices de seis caras iguales con tres vértices iguales en cada cara.

2. **Teselación 666 y truncamiento por los puntos medios**

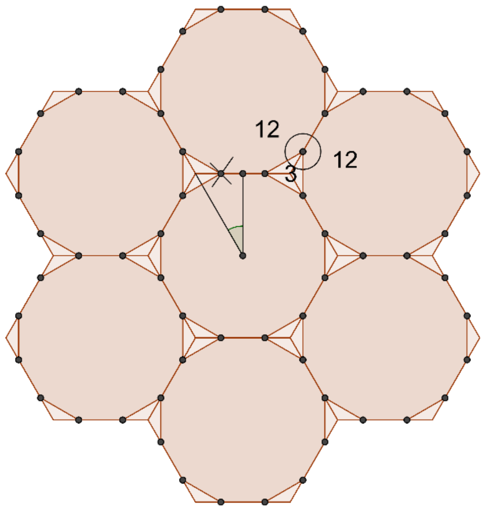
Truncamiento mitad de tres seíses = 6363




3. **Teselación 666 y truncamiento por duplicación del número de lados**

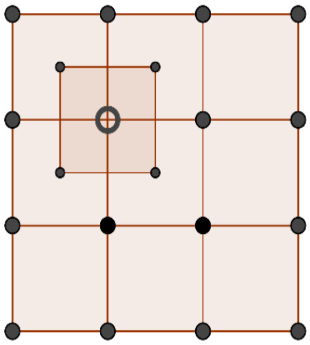


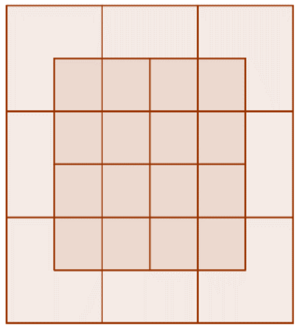
Bisección del ángulo central




Truncamiento duplicación de tres seíses = (12)(12)3

## 1. Teselación 4444 y dual

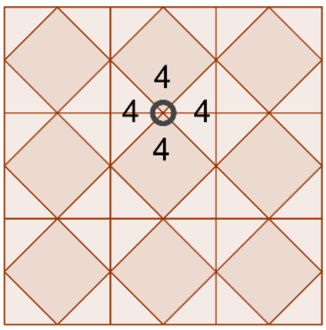




D(4444) = 4444

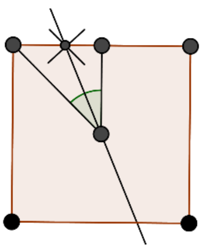
4444: T. de caras de cuatro vértices iguales con cuatro caras iguales en cada vértice.
4444: T. de vértices de cuatro caras iguales con cuatro vértices iguales en cada cara.

## 2. Teselación 4444 y truncamiento por puntos medios

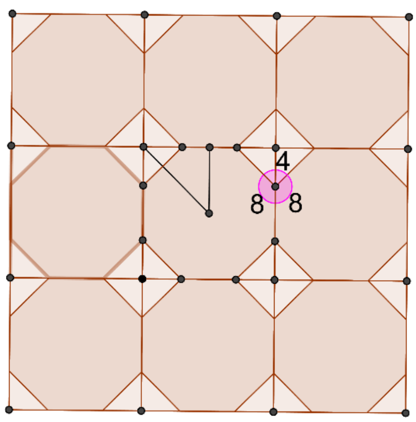



Truncamiento mitad de cuatro cuatros = 4444

## 3. Teselación 4444 y truncamiento por duplicación del número de lados

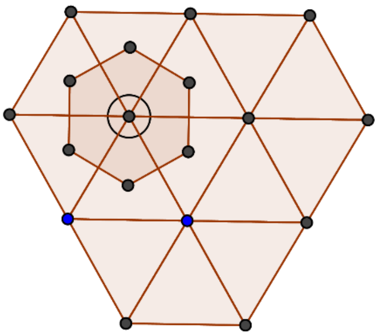


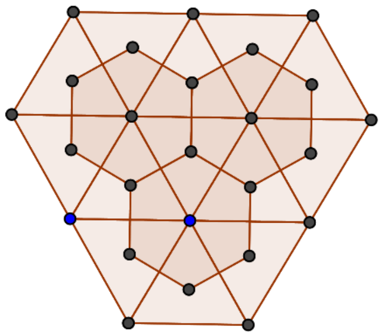
Bisección del ángulo central




Truncamiento duplicación de cuatro cuatros = 884

## 1. Teselación 333333 y dual



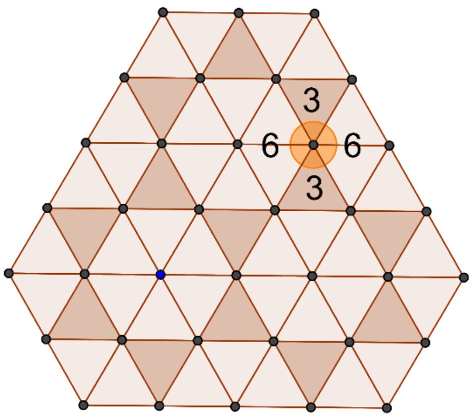


Dualidad con dualidad se paga

333333: T. de vértices de seis caras iguales con tres vértices iguales en cada cara.

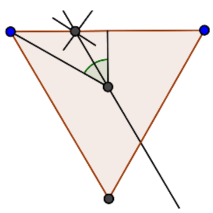
666: T. de caras de seis vértices iguales con tres caras iguales en cada vértice.

## 2. Teselación 333333 y truncamiento por puntos medios

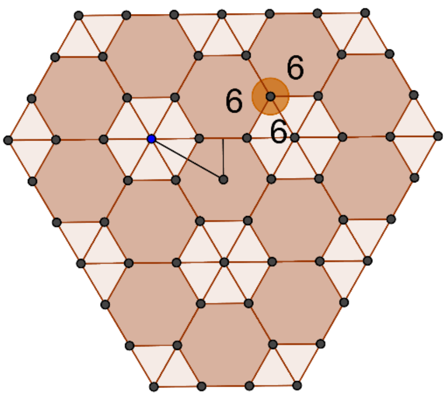



Truncamiento mitad de seis treses = 3636
(la misma teselación que en la dual)

## 3. Teselación 333333 y truncamiento por duplicación del número de lados



Bisección del ángulo central




Truncamiento duplicación de seis treses = 666

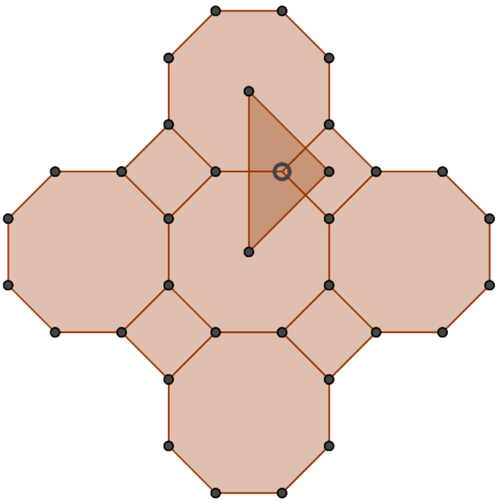
## C. Teselaciones semirregulares y dualidad

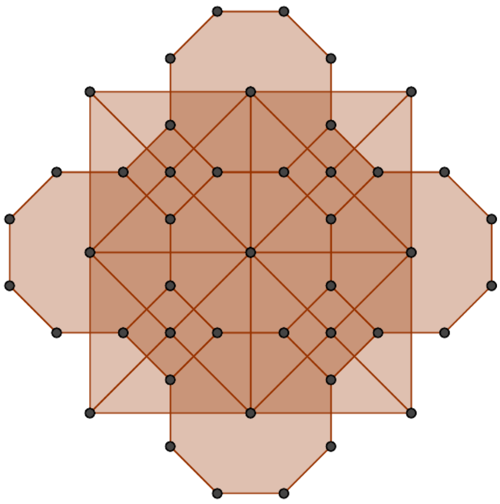
(Teselaciones con polígonos regulares no necesariamente iguales y vértices indistinguibles)

*i) Con tres caras en un vértice*

a) Dos iguales y una distinta (la igual debe ser par)

**a1. Teselación 884 y dual**





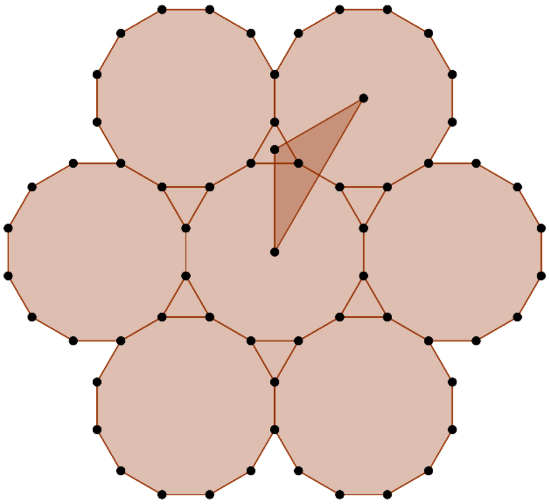
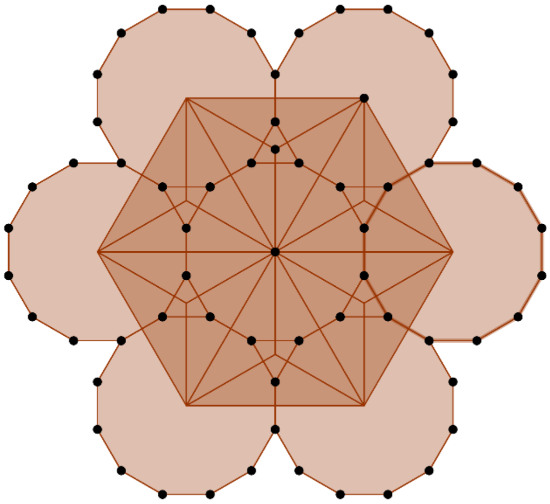
884: Teselación de vértices iguales. En cada vértice hay dos caras de ocho vértices y una cara de cuatro.

Dual: Teselación de caras iguales. En cada cara hay dos vértices de ocho caras y un vértice de cuatro caras. Por ello las teselas son triángulos con dos ángulos de $\frac{360°}{8}$ y un ángulo de $\frac{360°}{4}$. Es decir, la tesela dual es un triángulo rectángulo isósceles. Se extiende la teselación mediante simetrías axiales respecto a cualquiera de los tres lados de la tesela.

Bidualidad.

La teselación dual de la de triángulos rectángulos isósceles debería devolvernos la teselación 884. Mirando las dos teselaciones superpuestas esto ocurre si elegimos como representantes de los triángulos sus incentros, y la teselación 884 aparece al unir ordenadamente con un polígono los representantes de las caras triangulares coincidentes en un vértice.

**a2. Teselación  12-12-3 y dual**

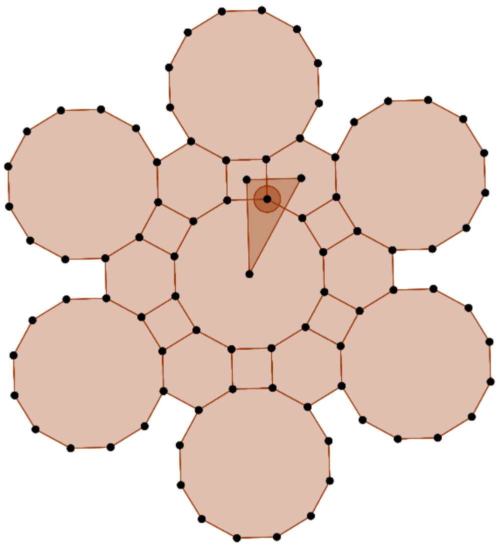
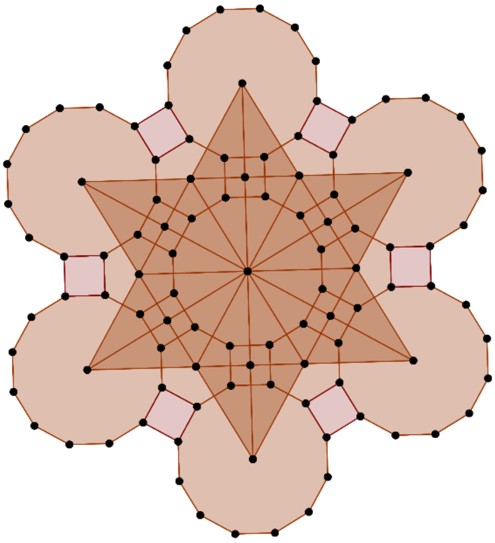
(12)(12)3:   Teselación de vértices iguales. En cada vértice hay dos caras de doce vértices y una cara de tres vértices.

Dual:  Teselación de caras iguales. En cada cara hay dos vértices de doce caras y un vértice de tres caras. Por ello las teselas son triángulos con dos ángulos de $\frac{360°}{12}$ y un ángulo de $\frac{360°}{3}$ . Es decir, la tesela dual es un triángulo  isósceles de $120°, 30°\ y\ 30°$ (un tercio de triángulo equilátero. Se extiende por simetrías axiales respecto a cualquier lado de la tesela.

Bidual: Tomando los incentros de la teselación de triángulos y uniendo ordenadamente aquellos cuyas caras comparten vértice llegamos a la teselación de partida.

b) Las tres caras distintas (las tres deben ser pares)

**Teselación 46(12) y dual**

46(12):   Teselación de vértices iguales. En cada vértice hay una cara de cuatro, una de seis y otra de 12 vértices doce vértices.

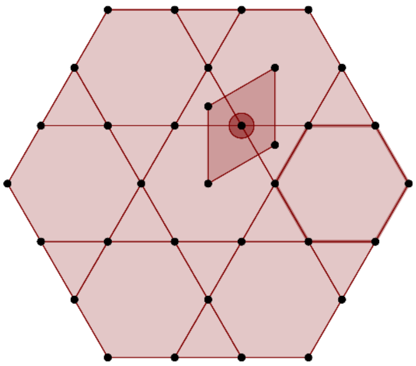
Dual: Teselación de caras iguales. En cada cara hay un vértices de cuatro, uno de seis y otro de doce vértices. Las teselas son triángulos con ángulos de $\frac{360°}{4}$ , $\frac{360°}{6}$ y $\frac{360°}{12}$; es decir la tesela dual es un triángulo cartabón. Se extiende por simetrías axiales respecto a cualquier lado de la tesela.

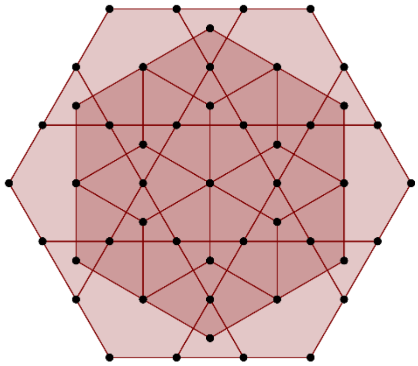
Bidual: De nuevo funcionan los incentros de los triángulos como representantes de éstos.

*ii) Con cuatro caras en un vértice*

a) Doble pareja alternándose las formas

**Teselación 3636 y dual**





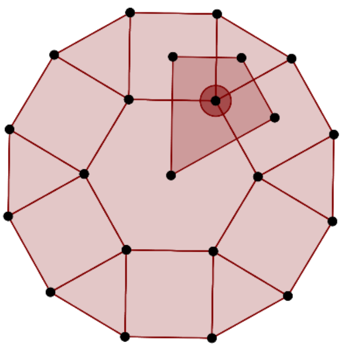
3636: Teselación de vértices iguales. En cada vértice hay dos caras de tres vértices y dos caras de seis vértices.

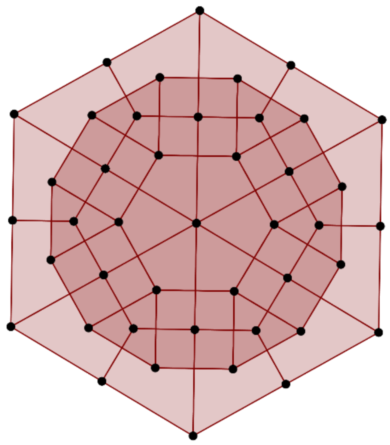
Dual: Teselación de caras iguales. En cada cara hay dos vértices de tres caras y dos vértices de seis caras. Las teselas son cuadriláteros con ángulos alternos de $\frac{360°}{3}$ y $\frac{360°}{6}$. Es decir, la tesela dual es un rombo formado por dos triángulos equiláteros pegados por un lado. Se extiende por simetrías axiales respecto a cualquier lado del rombo.

Bidual: Los rombos tienen incentro y podemos dualizar con ellos la teselación y volver a la 3636.

b) Dos iguales y otras dos distintas (las caras iguales deben ser pares y opuestas.

**Teselación 4346 y dual**





4346: Teselación de vértices iguales. En cada vértice hay dos caras no contiguas de cuatro vértices, una de tres y otra de seis.

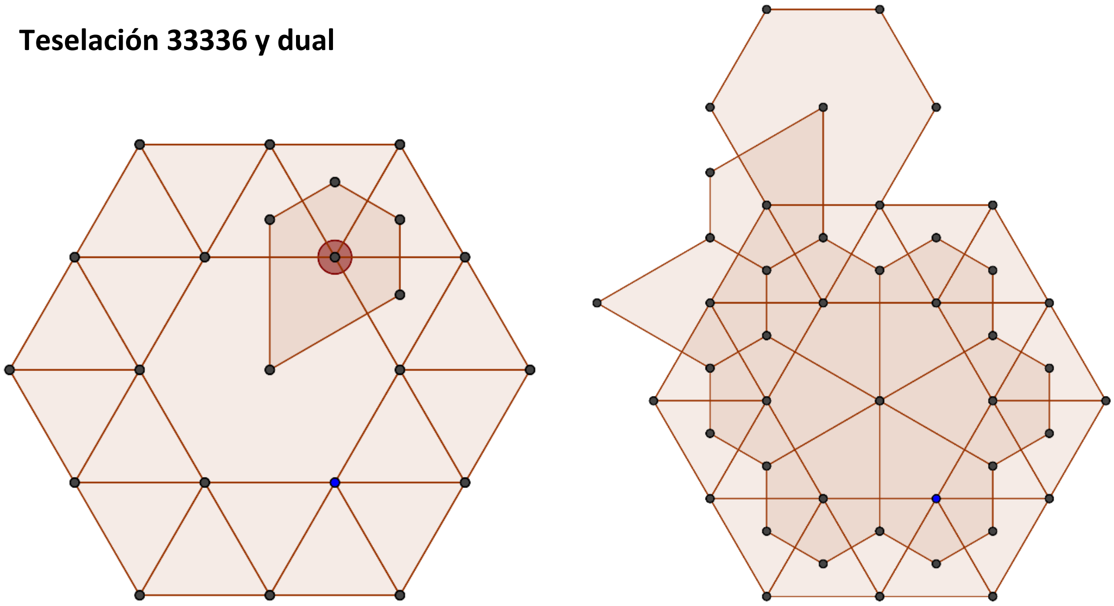
Dual: Teselación de caras iguales. En cada cara hay dos vértices opuestos de cuatro caras, un vértice de tres caras y otro de seis. Las teselas son cuadriláteros cometas con dos ángulos opuestos de $\frac{360°}{4}$ y otros de $\frac{360°}{3}$ y $\frac{360°}{6}$, formadas al pegar dos triángulos cartabones por sus hipotenusas. Se extiende la tesela con simetrías axiales respecto a los lados largos y con giros de $120°$ respecto a los centros de los triángulos equiláteros.

Bidual: Estos cuadriláteros cometa tienen incentro.

*iii) Con cinco caras en un vértice*

a) Cuatro iguales y una distinta

**Teselación 33336 y dual**



Podemos empezar la teselación 33336 rodeando un hexágono regular con triángulos equiláteros. Luego hay que añadir un nuevo hexágono y lo podemos hacer de forma levógira o dextrógira.

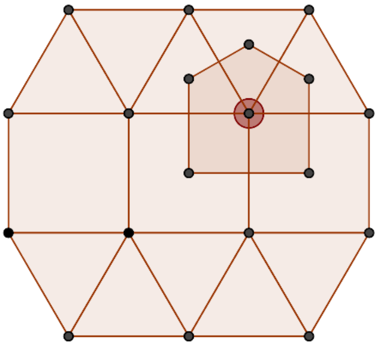
33336: Teselación de vértices iguales. En cada vértice hay cuatro caras de tres vértices y una de seis.

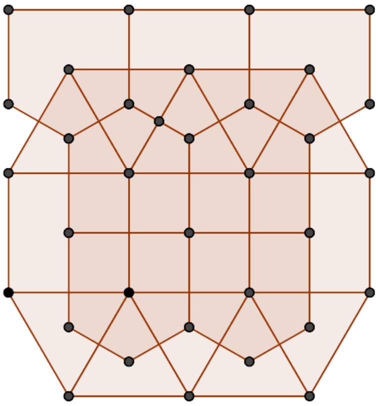
Dual: Teselación de caras iguales. En cada cara hay cuatro vértices de tres caras y un vértice de seis. Las teselas son pentágonos con cuatro ángulos de $\frac{360°}{3}$ y uno de $\frac{360°}{6}$, formadas al adosar un triángulo equilátero a medio hexágono regular. La teselación dual se extiende por simetrías axiales respecto a los lados largos, y giros de $120°$ con respecto a los centros de los triángulos equiláteros sin lado común con los hexágonos.

Bidual: Las teselas pentagonales de la dual tienen incentro.

b) Tres iguales y dos iguales

b1. **Teselación 33344 y dual**



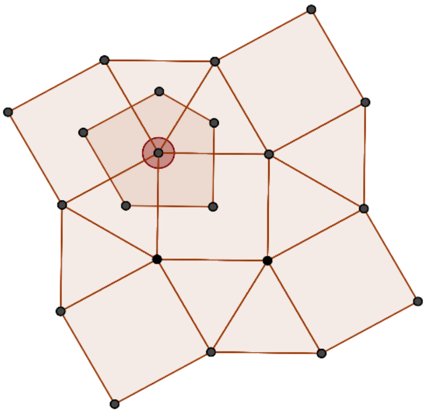


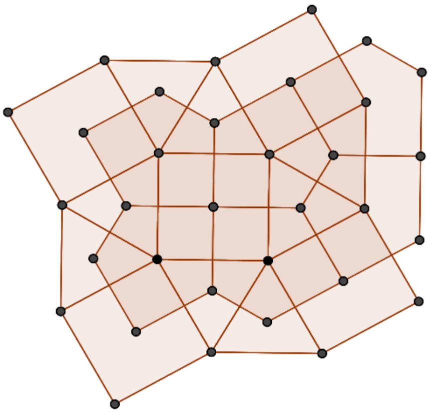
33344: Teselación de vértices iguales. En cada vértice hay tres caras de tres vértices y dos de cuatro consecutivas.

Dual: Teselación de caras iguales. En cada cara hay tres vértices de tres caras y dos vértices de cuatro consecutivos. Las teselas son pentágonos con tres ángulos de $\frac{360°}{3}$ y dos de $\frac{360°}{4}$. Son pentágonos casita de base cuadrada y tejado isósceles con ángulo superior de $150°$. La teselación dual se extiende por simetrías axiales respecto a los tres lados que forman lo ángulos rectos y simetrías respecto a los puntos medios de las alas del tejado.

Bidual: Estos pentágonos casita también tienen incentro.

**b2. Teselación 34343 y dual**





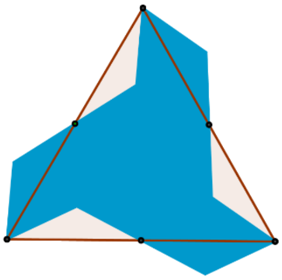
34343: Teselación de vértices iguales. En cada vértice hay tres caras de tres vértices y dos de cuatro no contiguas. Para formar la teselación empezamos poniendo triángulos equiláteros en los lados de un cuadrado. En otro de los lados de uno de los triángulos pegamos otro cuadrado y ello determina el giro a derecha o a izquierda de la teselación

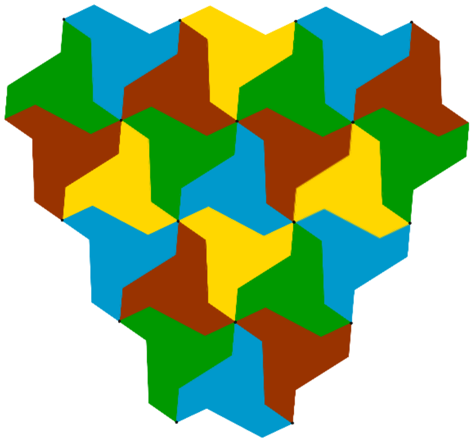
Dual: Teselación de caras iguales. En cada cara hay tres vértices de tres caras y dos vértices de cuatro no contiguos. Las teselas son pentágonos Cairo con tres ángulos de

120°. La teselación dual se extiende por giros de 90° con centros en los centros de los cuadrados de partida.

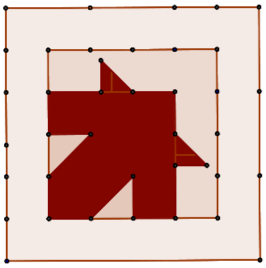
## D. Otras teselaciones

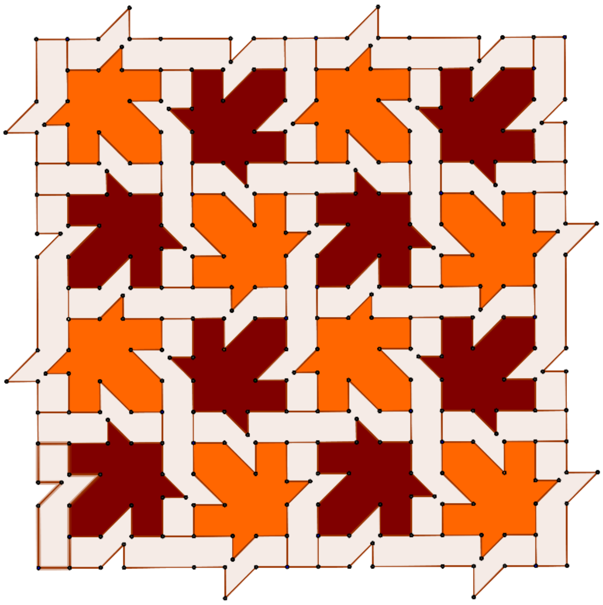
### Teselación de la pajarita



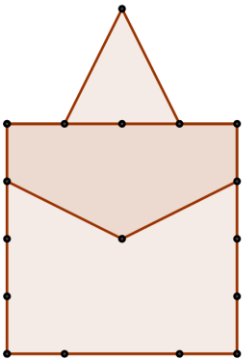


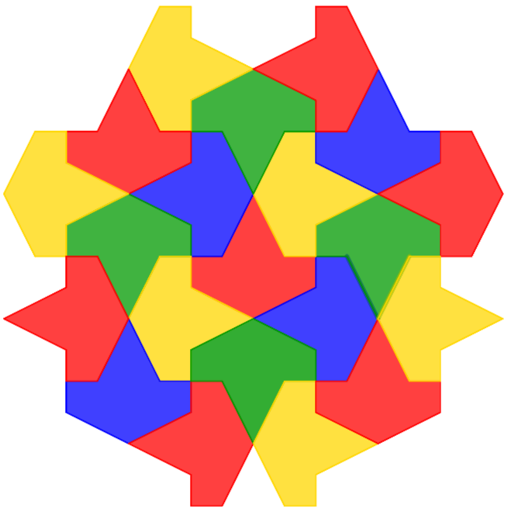
### Teselación de la hoja



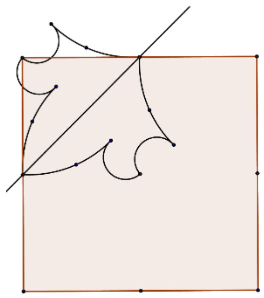


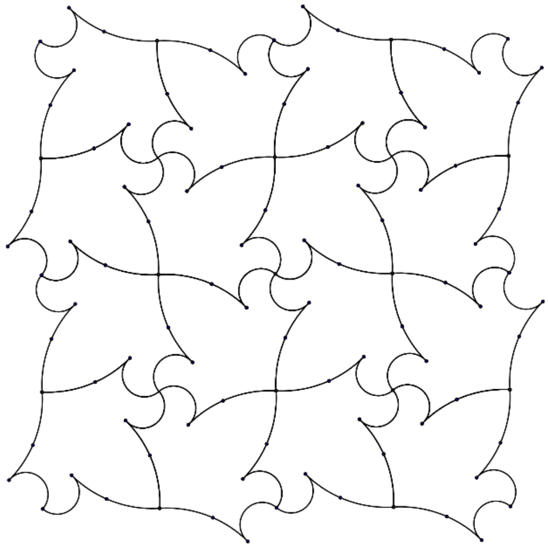
### Teselación de la chincheta



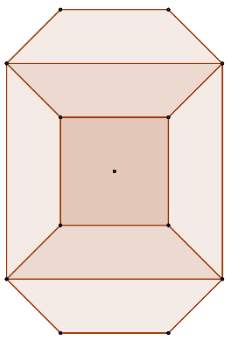


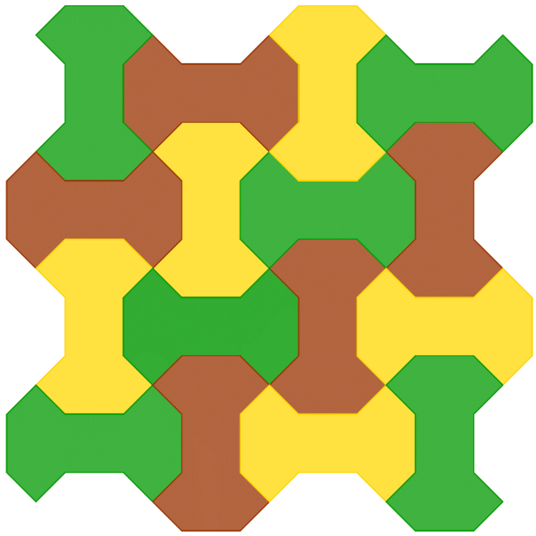
Teselación de hojas



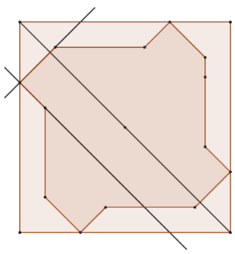


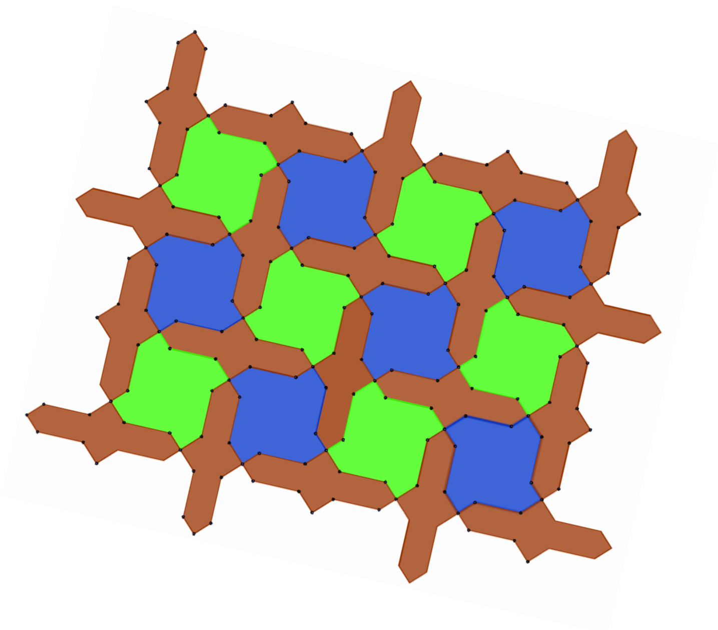
Teselación del hueso



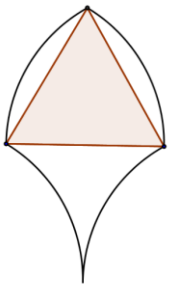


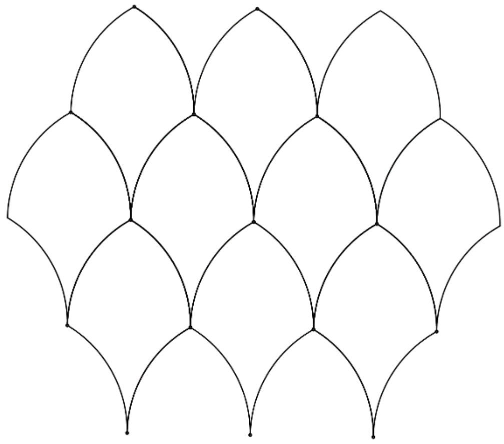
Teselación del murciélago





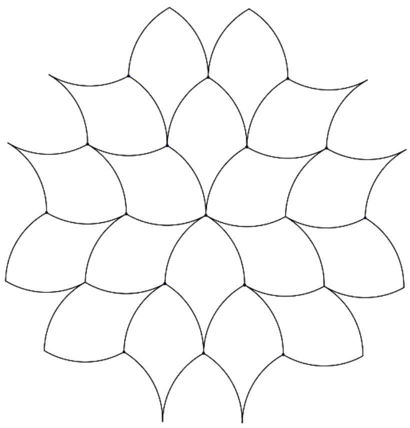
Teselación punta de lanza



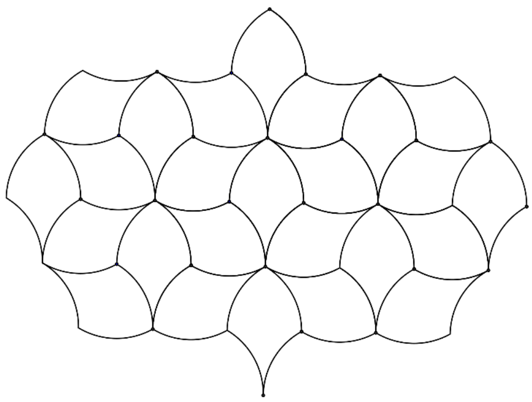


## E. Teselaciones periódicas

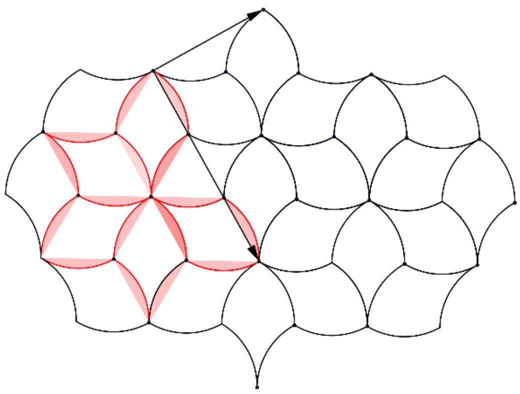
Llamamos teselaciones periódicas a aquéllas en las que existe un grupo conexo de teselas, que llamaremos motivo, el cual mediante traslaciones acabaría completando la teselación. Una vez reconocida la tesela grupo generadora, ésta puede ser cambiada por otro motivo en forma de paralelogramo. Basta para ello dibujar dos vectores de origen un punto del motivo inicial y con puntos finales en los dos puntos correspondientes de una copia contigua. Los vectores son lados del motivo con forma de paralelogramo.



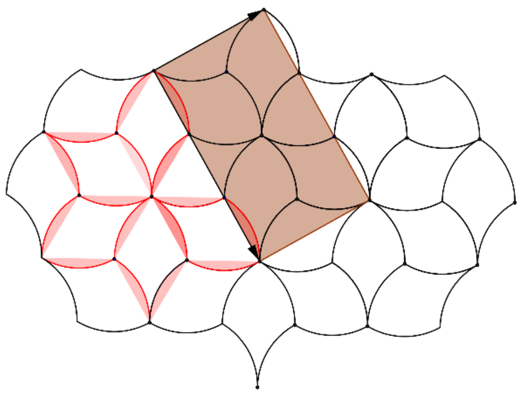
Teselación no periódica



Teselación periódica



Motivo inicial y dos vectores

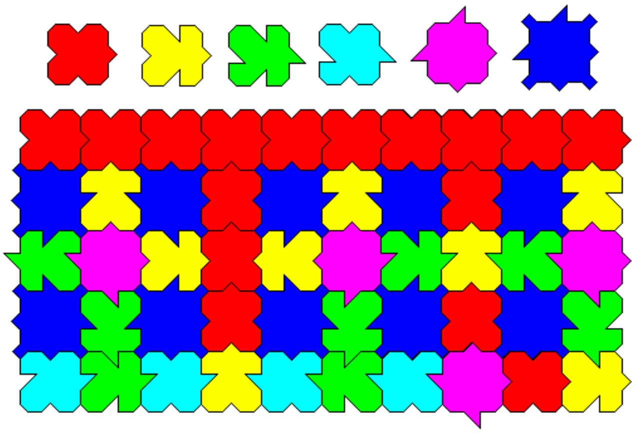


Motivo final en forma de paralelogramo

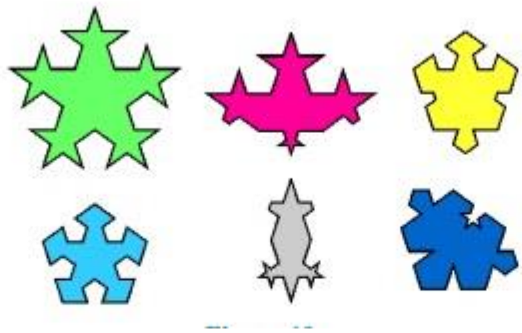
## F. Teselaciones caóticas

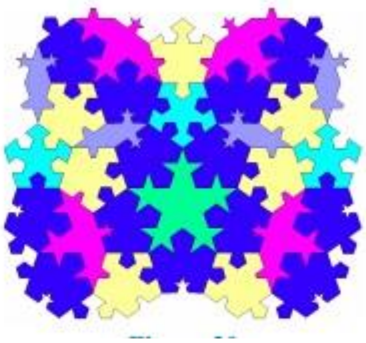
(Teselaciones de Penrose)

Son teselaciones cuyas teselas base no pueden ser reorganizadas de forma que se obtenga una teselación periódica. No se conoce ninguna teselación caótica unimodular. El problema de existencia de estas teselaciones surge alrededor de 1960 y es a comienzo de los años 70 que se encuentran teselaciones caóticas con un número pequeño de teselas distintas.

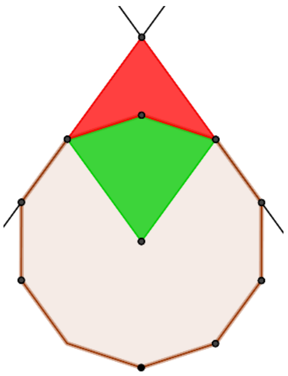


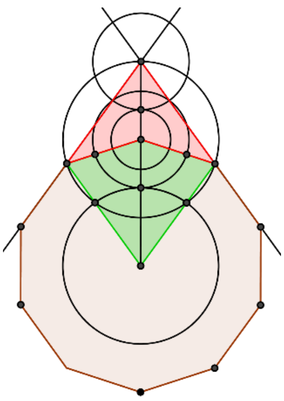
6 teselas de Robinson

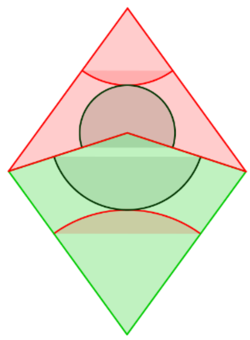




6 teselas de Penrose

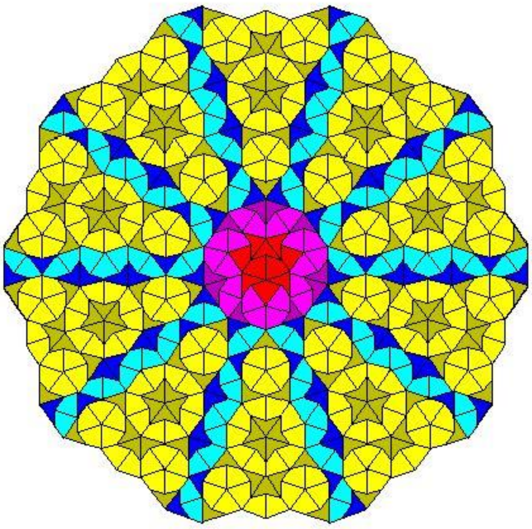




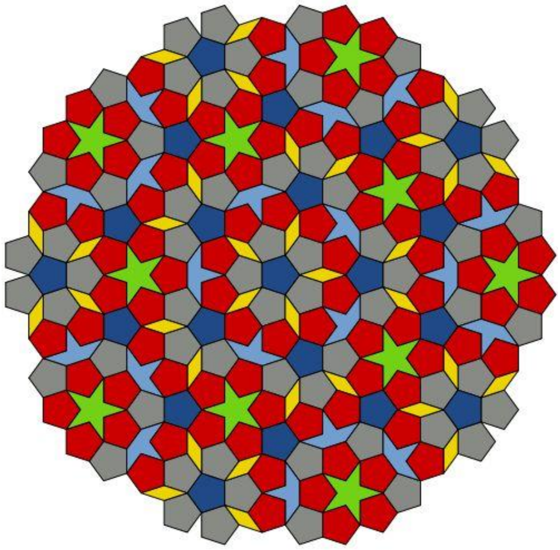


Dardo y flecha | Arcos | Dado y flecha con arcos

Roger Penrose en 1974 redujo el problema a un par de teselas (dardos y flechas) obtenidas de la división de un paralelogramo con ángulos de 72° y 108°, que pueden de distinta forma teselar el plano de forma aperiódica pero a las que hay que prohibir que se ensamblen formando ese paralelogramo, pues entonces podría formarse con ellas una teselación periódica. Así que les añadió unos arcos interiores que deben continuarse en el pegado de dos piezas.

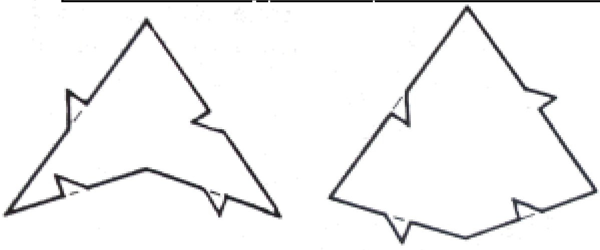


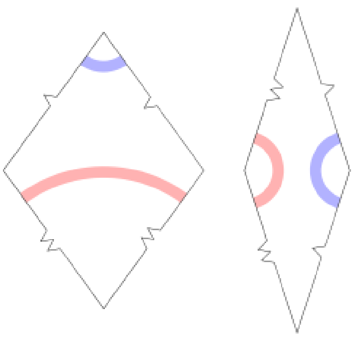
Teselación de dardos y flechas cumpliendo la regla de arcos.



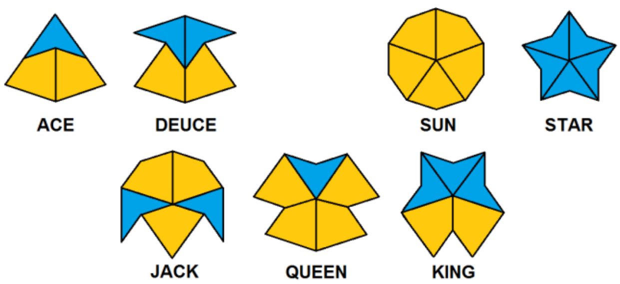
Teselación de Penrose formada aparentemente por cuatro piezas, pero con ciertas reglas de pegado. Por ello para que el grupo de teselas se considere caótico, deben considerarse distintos los tres polígonos regulares de diferente color.

Y si lo de los arcos no nos convence podemos añadir a nuestras simples teselas muescas de engarce que eviten el acoplamiento prohibido.





Teselas rómbicas de Penrose con arcos y con muescas.




Los siete vértices distintos posibles en las teselaciones de dardos y cometas con regla de arcos.