Reglas de divisibilidad

Propiedades básicas en la divisibilidad:

a) Si *m* divide a *n*, entonces cualquier divisor de *m* divide también a *n*.
b) Sacar divisor común.

Álgebra de la divisibilidad por *n*:

"Sí" + "Sí" = "Sí"	"Sí" x "Sí" = "Sí^2"
"Sí" + "No" = "No"	"Sí" x "No" = "Sí"
"No" + "No" = ?	"No" x "No" = "No"

Clasificación de las reglas de divisibilidad $\begin{cases} \text{De terminación} \\ \text{De tipo 9} \\ \text{Mixtas} \end{cases}$

Reglas de terminación

Un número *p* es divisible por $2^m \cdot 5^n$, si siendo *q* el mayor de {m, n}, la terminación de *q* cifras de *m* es divisible por $2^m \cdot 5^n$.

Ej: Un número $p = a \cdot 1000 + b$ es divisible por, 2^3, $2^3 \cdot 5$, $2^3 \cdot 5^2$, $2^3 \cdot 5^3$, $2^2 \cdot 5^3$, $2 \cdot 5^3$, 5^3, si respectivamente *p* es divisible por, 2^3, $2^3 \cdot 5$, $2^3 \cdot 5^2$, $2^3 \cdot 5^3$, $2^2 \cdot 5^3$, $2 \cdot 5^3$, 5^3.

El argumento es que el sumando $a \cdot 1000$ dice "Sí" a la divisibilidad y hace que la decisión de si lo es la suma recaiga en el sumando *b*.

Reglas de recurrencia para la divisibilidad por potencias de 2

Un número es divisible por 4,

si es par y $\begin{cases} \text{termina en múltiplo de 4, siendo par la cifra de las decenas} \\ \text{no termina en múltiplo de 4, siendo impar la cifra de las decenas} \end{cases}$

Un número es divisible por 8,

si es múltiplo de 4 y $\begin{cases} \text{de 8 la terminación de dos cifras, siendo par la cifra de las centenas} \\ \text{no de 8 la terminación de dos cifras, siendo impar la cifra de las centenas} \end{cases}$

488 se descompone en dos sumandos, 400 y 88, ambos múltiplos de 8.

368 es múltiplo de 8 porque 300 y 68 dicen "Sí" a la divisibilidad por 4, pero "No" a la de 8. Aparece una nueva ley algebraica, relativa sólo a potencias de 2:

"Sí 4 y No 8" + "Sí 4 y No 8" = "Sí 8", ya que ambos sumandos al dividirlos por 8 dan cuatro de resto.

Reglas tipo 9

El 9 es el anterior al 10 en nuestro sistema de numeración decimal, y 99, 999, ..., son los anteriores a las siguientes potencias de 10.

72543 puede ser escrito en forma polinómica como $7 \cdot 10000 + 2 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 3$ y en telescópica tipo 9, como $7 \cdot 9999 + 7 + 2 \cdot 999 + 2 + 5 \cdot 99 + 5 + 4 \cdot 9 + 4 + 3$, colocando en cola lo "no nueve", es decir, $(7 \cdot 9999 + 2 \cdot 999 + 5 \cdot 99 + 4 \cdot 9) + (7 + 2 + 5 + 4 + 3)$. El primer paréntesis como un solo número responde "Sí" a la divisibilidad por 9 y deja entonces la decisión de divisibilidad de todo el número a la respuesta del segundo paréntesis.

De igual forma la divisibilidad por 99 nos hace escribir un número en forma telescópica con respecto a los alargamientos de 99 múltiplos de 99 (99, 9999, 999999, ...) . Así la escritura de $72543 = 7 \cdot 9999 + 7 + 25 \cdot 99 + 25 + 43 = (7 \cdot 9999 + 25 \cdot 99) + (7 + 25 + 43)$, nos indica que para que un número sea múltiplo de 99, la suma de los números obtenidos al coger sus cifras de dos en dos desde las unidades debe ser múltiplo de 99.

Un número es divisible por un *n*-9 si la suma de los números obtenidos al coger sus cifras de *n* en *n* desde las unidades es divisible por ese *n*-9.

Un natural *m* primo con 2 y con 5 tiene siempre un *n*-9 por múltiplo. Para ello basta con razonar que $\frac{1}{m}$ tiene una expresión decimal periódica pura y la igualación de esta fracción con su fracción generatriz canónica conduce al resultado.
Del menor de esos *n*-9 toma su regla de divisibilidad.

Así un número es múltiplo de 999, 37, 27, si la suma de los números obtenidos al coger sus cifras de 3 en 3 desde las unidades es divisible respectivamente por 999, 37 y 47 (ya que 999 es el menor *n*-9 múltiplo de esos tres números.
Como 999999 es el menor *n*-9 múltiplo de 7, la regla de divisibilidad por 7 implica en una primera instancia cortar los números en paquetes de 6 y sumarlos, lo cual la convierte en una regla poco práctica (casi inútil) para números no muy grandes, que debe ser sustituida por otras alternativas.

Reglas mixtas
Son para aquellos números que no son primos con 10 pero tienen algún divisor primo con 10. Lo separamos en producto de un divisor de una potencia de 10 y un factor primo con 10, y deberá cumplir las reglas de cada uno de esos factores.

Apéndice
Simplificación de reglas de divisibilidad

Reglas tipo 11
Los múltiplos de 11 más cercanos a las potencias de 10 son: 11, 99, 1001, 9999, 100001, ...
(Observemos que los *n*-9 con *n* par son visualmente múltiplos de 11, y $10^{2n+1}+1$ es igual a 10 por un (2*n*)-9 más 11, y por ello múltiplo de 11)

Así $72543=7 \cdot 9999 + 7 + 2 \cdot 1001 - 2 + 5 \cdot 99 + 5 + 4 \cdot 11 - 4 + 3 =$
$= \left(7 \cdot 9999 + 2 \cdot 1001 + 5 \cdot 99 + 4 \cdot 11\right) + \left(7 - 2 + 5 - 4 + 3\right)$ y con esta distribución del número la divisibilidad por 11 la decide el segundo término.
Por tanto 68145 es múltiplo de 11 porque (6+81+45) es múltiplo de 11 (regla tipo 9) o porque (6 – 8 + 1 – 4 + 5) es múltiplo de 11 (regla tipo 11)

Las reglas tipo 11 pueden generalizarse para 101, 1001, ..., en los que las sumas alternadas de signo se refieren a trozos de dos, tres, ..., cifras.
7 divide a 999999 y por tanto a 111111.
111111 es múltiplo visual de 1001.
111111= 111 · 1001 y 7 divide a 1001, luego 7 tiene regla tipo 1001.

Un número es múltiplo de 7 si la suma alternada de signo de los bloques de tres cifras obtenidos a partir de las unidades da un múltiplo de 7.
Así 1234567 será múltiplo de 7 si, 1 – 234 + 567 = 334 es múltiplo de 7, pero 350 lo es y 334 está a distancia 16 de él, luego no es múltiplo de 7.

Por último la regla tipo 9 de un número primo con 10 puede ser diseccionada cifra a cifra. Los múltiplos de 7 más cercanos a 10 y 100 son 7 y 98.
Un número *abc* de tres cifras es múltiplo de 7 si,
$a\cdot 98+2a+b\cdot 7+3b+c=\left(a\cdot 98+b\cdot 7\right)+\left(2a+3b+c\right)$, es decir si $\left(2a+3b+c\right)$ lo es.
44653 ➞ 653 – 44 = 609 ➞ 2 · 6 + 3 · 0 + 9 = 21, múltiplo de 7.
72581345 ➞ 72 – 581 + 345 = - 164 , no es múltiplo de 7, bien porque 2 ·1 +3 ·6 +4 no lo es, o bien porque 140 sí lo es y 164 está a distancia 24.