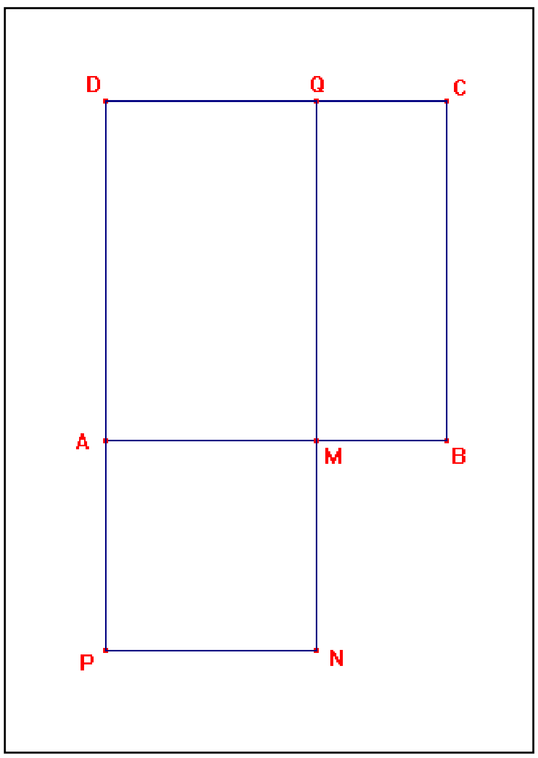
Estalmat Madrid
4 de marzo de 2017

Número de Oro y Rectángulos Áureos.

El número de oro es una cantidad irracional que surge en la Grecia clásica. Se representa normalmente por la letra griega Φ (“fi”) por ser la inicial del nombre del escultor Fidias, que fue pionero en el uso de este número en sus obras de arte.

En los elementos de Euclides aparece como una proporción. La definición 3 del libro VI de los “Elementos” dice:

“Un segmento está dividido en *extrema y media razón*, cuando el segmento entero es al segmento mayor como el segmento mayor es al menor”.



1.- Traduce la definición de Euclides a lenguaje geométrico. Ayúdate de la figura: el segmento que ha dividido Euclides en extrema y media razón es AB. Lo primero que construye es el cuadrado ABCD y a continuación un rectángulo DPNQ que tiene el mismo área que él, y tal que APNM es un cuadrado. Entonces $MB \times BC = AM^2$.

Y como $BC = AB$, $\quad AB \times MB = AM^2$.

Es decir, $\dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AM}{MB}$

2.- Vamos a calcular algebraicamente el valor del número de oro.

Fíjate que el número de oro es el cociente entre el segmento y su parte mayor o entre la parte mayor y la parte menor, cuando se divide el segmento en extrema y media razón. Si llamas m a la parte mayor y n a la menor, tienes $\Phi = \dfrac{m+n}{m} = \dfrac{m}{n}$. Es decir, $1 + \dfrac{n}{m} = \dfrac{m}{n}$. Y sustituyendo $\dfrac{m}{n} = \Phi$, tenemos la ecuación $1 + \dfrac{1}{\Phi} = \Phi$, que se puede escribir, multiplicando toda la ecuación por Φ, como $\Phi + 1 = \Phi^2$. Finalmente, transponiendo términos llegamos a la ecuación de segundo grado $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$. La solución positiva de esta ecuación es el número de oro.

3.- Has observado que el número de oro verifica la relación $\Phi^2 = \Phi + 1$. Multiplicando los dos miembros de la igualdad por Φ tenemos: $\Phi^3 = \Phi^2 + \Phi$. Y si repetimos el proceso, tenemos que las potencias de Φ cumplen la relación $\Phi^n = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2}$, de modo que la sucesión 1, Φ, Φ^2, Φ^3, Φ^4, … es tal que cada término se obtiene sumando los dos anteriores. Exactamente igual que ocurre con otra sucesión famosa, la de Fibonacci:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, …

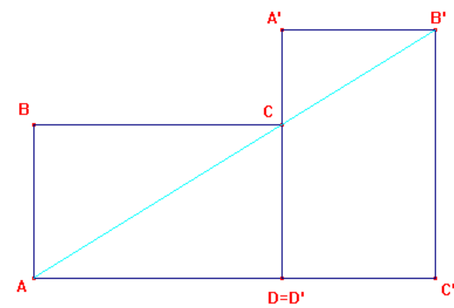
De esta sucesión vamos a hablar: calcula en esta sucesión el valor del cociente entre cada término y su anterior, y reconoce la pauta de comportamiento de dichos cocientes.

4.- Como ϕ verifica la igualdad $\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$, siempre podemos reemplazar ϕ por $1+\frac{1}{\phi}$. Así, si sustituimos ϕ en el miembro derecho de la igualdad anterior obtenemos $\phi = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\phi}}$. Si iteramos este proceso indefinidamente obtenemos la siguiente expresión de ϕ como fracción continua: $\phi = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}$.

Esta fracción continua nos permite obtener aproximaciones racionales de ϕ:

- $\phi_1 = 1 = 1/1$
- $\phi_2 = 1 + 1/1 = 2/1$
- $\phi_3 = 1 + 1/(1+1/1) = 1+1/2 = 3/2$
- $\phi_4 = 1 + 1/(1+1/(1+1/1)) = 1+1/(3/2) = 1+2/3 = 5/3$

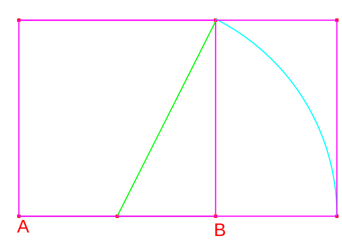
Observa, además, que las fracciones obtenidas están formadas por dos términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci



5.- Un rectángulo áureo es un rectángulo cuyas medidas están en la proporción áurea, es decir que el cociente entre el lado mayor y el lado menor es Φ. Demuestra que un rectángulo ABCD es un rectángulo áureo si al girarlo 90º alrededor del vértice D, el rectángulo que se obtiene D'A'B'C', es tal que los vértices A, C y B' están alineados:

6.- Demuestra que si añades un cuadrado de lado igual al lado mayor a un rectángulo áureo, obtienes otro rectángulo áureo.

7.- A partir de un rectángulo áureo, y añadiendo cuadrados, construye sucesivos rectángulos áureos que te permitan construir la pseudo-espiral logarítmica.



8.- Dado el lado mayor de un rectángulo áureo, obtener su lado menor y dibujar el rectángulo.

9.- Dado el lado menor de un rectángulo áureo, obtener su lado mayor y dibujar el rectángulo.

10.- Observa que la relación entre el lado del pentágono regular estrellado y el lado del pentágono regular es el número de oro. ¿Serías capaz de demostrarlo?